Teoria della relatività ristretta

Schema storico

$$\text{Trasformazioni di Galileo} \begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

La meccanica classica è Galileo-invariante

Esempio:

moto di caduta di un grave in un sistema di riferimento inerziale in movimento rispetto ad un sistema fisso

Equazioni della caduta di un grave visto in un sistema fisso $\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + h \end{cases}$

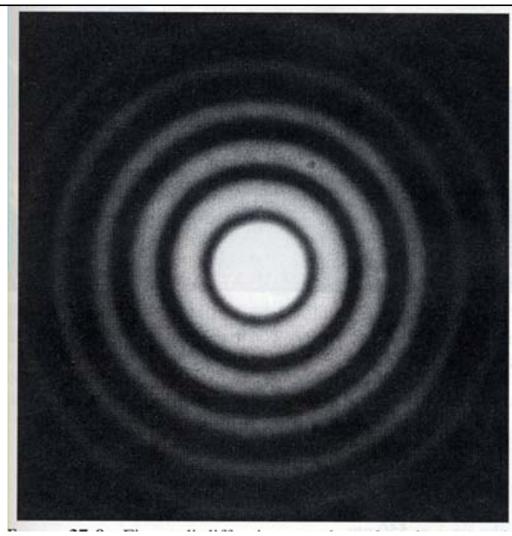
$\begin{cases} x' = 0 - vt \\ y' = -\frac{1}{2} g t^2 + h \end{cases}$ che ci porta alla relazione $\begin{cases} x' = -vt' \\ y' = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x'}{v} \right)^2 + h \end{cases}$ dove l'equazione descrive la traiettoria parabolica.

Il fenomeno visto nel sistema in quiete o dal sistema in movimento è sempre un moto rettilineo uniforme lungo le ascisse e un moto di caduta libera lungo le ordinate.

Tutta la meccanica classica Newtoniana è invariante per trasformazioni galileiane; non esiste alcun esperimento che consenta di capire se ci si trova in un sistema inerziale caratterizzato dal qualche particolare stato di moto.

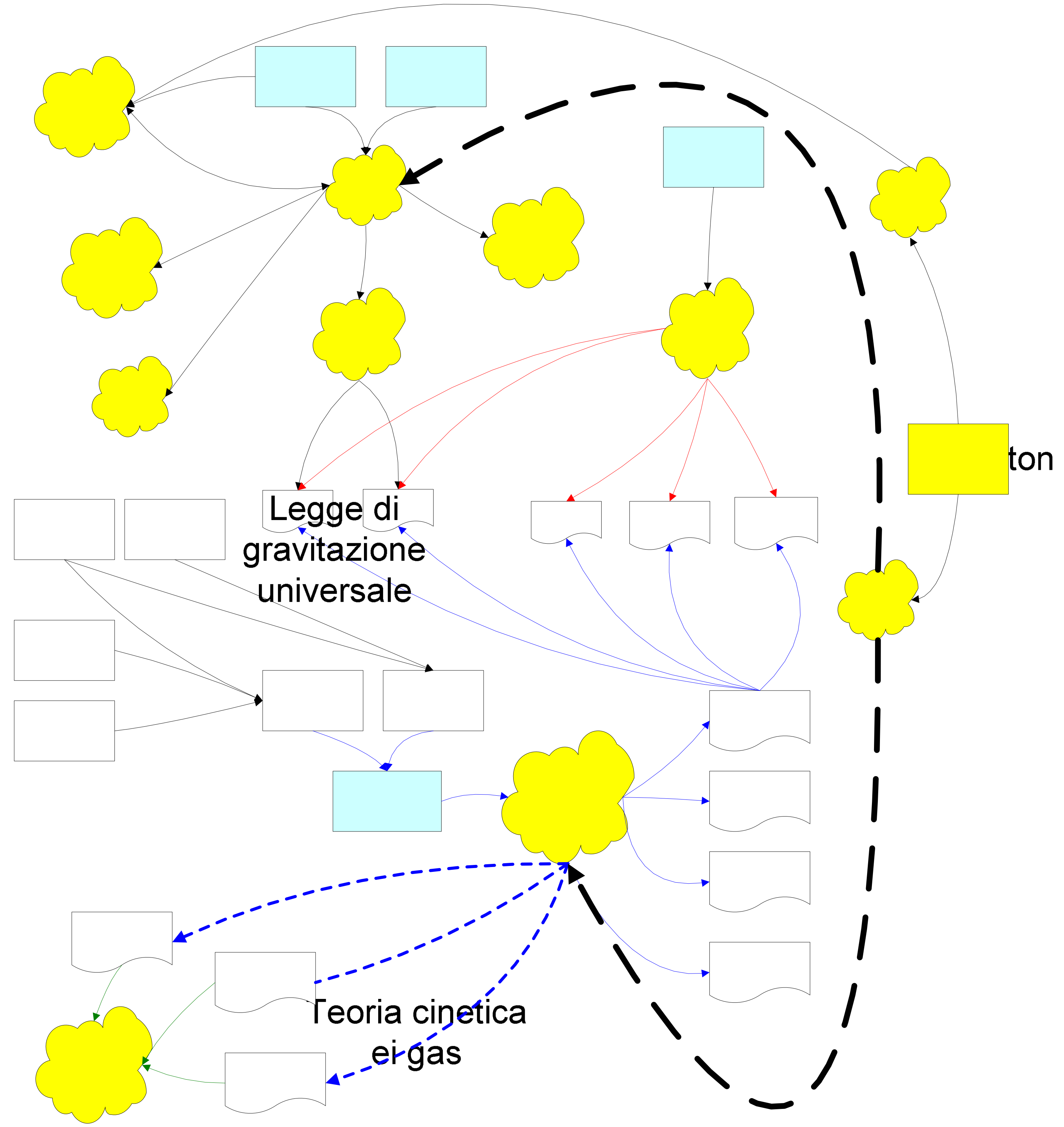
Crisi del modello newtoniano per alcune fenomenologie

Alcuni fenomeni caratteristici della luce non rispondono al modello corpuscolare di Newton ma a modelli ondulatori

Interferenza	Diffrazione
 **FIGURA 36-7** Una figura d'interferenza prodotta dal dispositivo mostrato nella figura 36-6. La fotografia è una veduta frontale dello schermo *C*. I massimi e minimi alternati sono chiamati *frange di interferenza* (assomigliano alle frange di filato su certi tipi di vestiti e drappeggi).	

Lo studio dei fenomeni elettromagnetici pone altre critiche al modello newtoniano-galileiano

Quadro dello sviluppo della fisica fino alle equazioni di Maxwell



Meccanica
Statistica

Set di equazioni di Maxwell

Legge di Faraday-Neumann $\Gamma(\vec{E}) = -\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt}$	Teorema di Gauss per $\vec{E}$ $\Phi_S(\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_k q_k$
Teorema di Ampere $\Gamma(\vec{B}) = \mu_0\left(\underbrace{\sum_k i_k}_{\text{correnti reali}} + \underbrace{\varepsilon_0 \frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt}}_{\text{corrente di spostamento}}\right)$	Teorema di Gauss per $\vec{B}$ $\Phi_S(\vec{B}) = 0$

Il set di equazioni di Maxwell descrive il legame fisico-funzionale fra campi elettrici e magnetici e unifica il tutto nell'unica entità chiamata "campo elettromagnetico".

Fra le tante "qualità" esse prevedono la possibile esistenza delle onde elettromagnetiche !

Dalle equazioni di Maxwell si ricava che i campi elettrico e magnetico possono soddisfare all'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

dove come velocità si è assunta la velocità della luce $c = 3\times 10^8 \frac{m}{s}$, grandezza correlata alla costante dielettrica del vuoto ε_0 e alla permeabilità magnetica μ_0 dalla relazione $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3\times 10^8 \frac{m}{s}$

Osserviamo che le equazioni di Maxwell, nell'ipotesi $\sum_k q_k = 0$ e $\sum_k i_k = 0$, acquistano una forte simmetria

Legge di Faraday-Neumann $\Gamma(\vec{E}) = -\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt}$	Teorema di Gauss per $\vec{E}$ $\Phi_S(\vec{E}) = 0$
Teorema di Ampere $\Gamma(\vec{B}) = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt}$	Teorema di Gauss per $\vec{B}$ $\Phi_S(\vec{B}) = 0$

$c \approx 3\times 10^8 \frac{m}{s}$.

Va notato che le relazioni che legano la velocità della luce a permeabilità e costante dielettrica del vuoto implicano che le equazioni di Maxwell del campo elettromagnetico contengono al loro interno tale velocità e in conseguenza di questo le equazioni di Maxwell si "modificano" al variare del sistema rispetto a cui vengono scritte secondo le trasformazioni di Galileo dato che le velocità della luce e dei sistemi di riferimento rispetto ai quali si rappresentano si compongono sommandosi o sottraendosi.

Teorema di Ampere con $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

$$\Gamma\left(\vec{B}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{d\Phi_S\left(\vec{E}\right)}{dt}$$

D'altra parte una evidenza sperimentale è la costanza del valore della velocità della luce in qualsiasi sistema di riferimento inerziale (Esperimento di Michelson-Morley).

Il problema fu: sono sbagliate le trasformazioni di Galileo o sono sbagliate le equazioni di Maxwell ?

La risposta fu trovata da Einstein il quale analizzò la relatività dei sistemi di riferimento inerziali è ricavò (meglio:motivò) le nuove equazioni di trasformazione formulando la teoria della relatività ristretta.

$$\text{Trasformazioni di Galileo}\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \qquad \text{Trasformazioni di Lorentz}\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

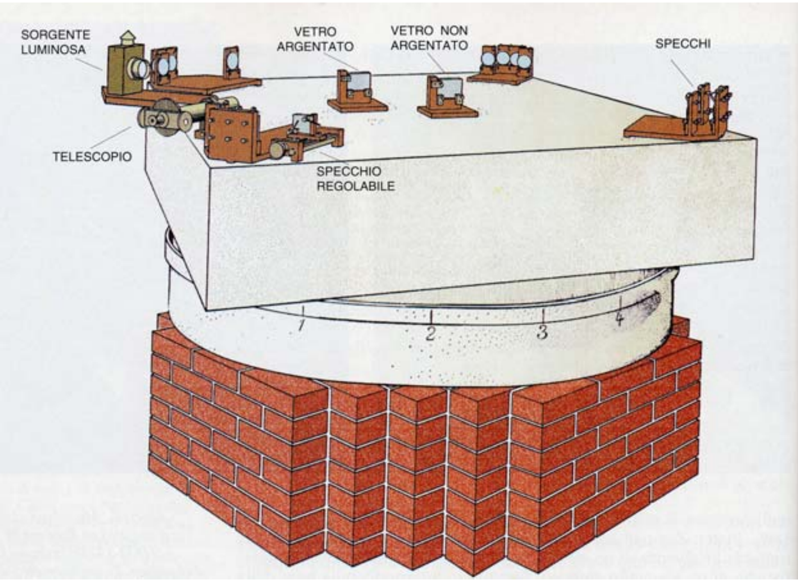
In realtà quando Einstein formulo la teoria della relatività ristretta le trasformazioni di Lorentz erano già note ma non avevano una motivazione fisica; erano semplicemente "le trasformazioni rispetto alle quali le equazioni di Maxwell sono invarianti".

Einstein motiva fisicamente le trasformazioni definendo una teoria completa che comporta anche molte conseguenze cinematico-dinamiche che troveranno una completa verifica sperimentale.

Va anche sottolineato come le trasformazioni di Galileo corrispondano alle trasformazioni di Lorentz per basse velocità, infatti

$$\begin{cases} x' = \lim\limits_{\frac{v}{c}\to 0}\dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \lim\limits_{\frac{v}{c}\to 0}\dfrac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = t \end{cases}$$

Esperimento di Michelson Morley: un fallimento di successo !



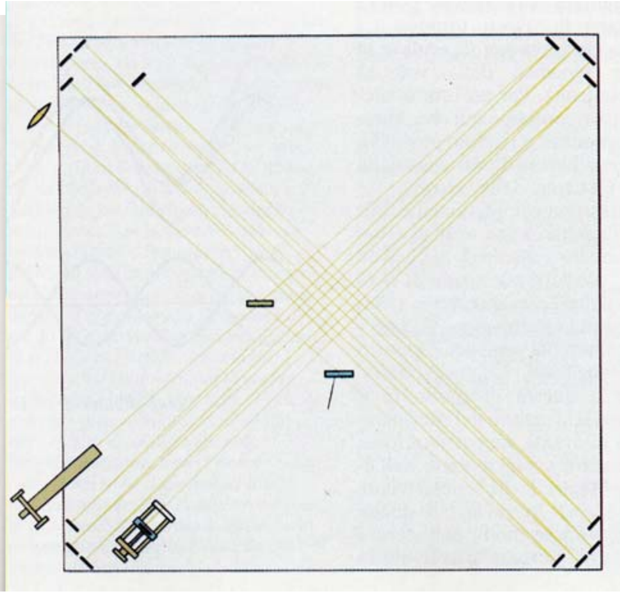
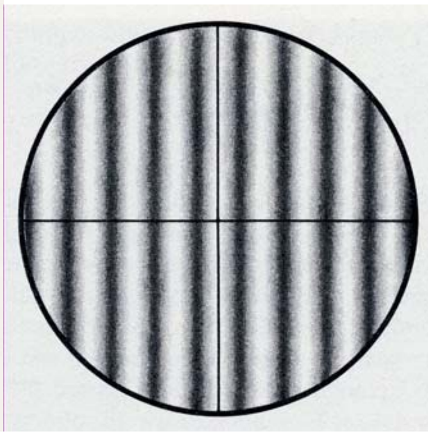


TABELLA 1-1 Ripetizioni dell'esperimento di Michelson-Morley.

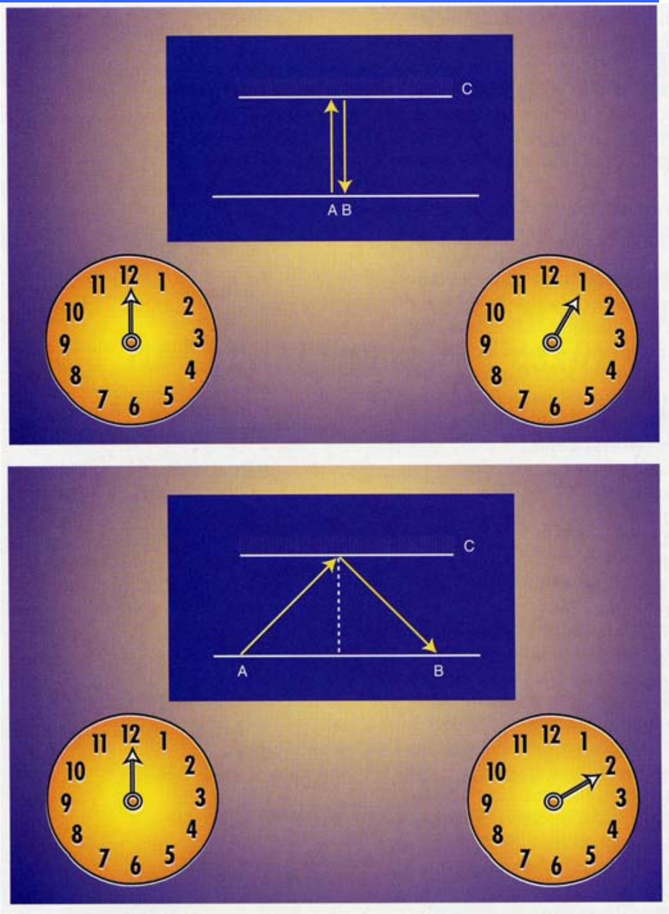
Osservatore	Anno	Luogo	l metri	Spostamento di frange predetto dalla teoria dell'etere	Limite superiore dello spostamento di frange osservato
Michelson	1881	Postdam	1,2	0,04	0,02
Michelson e Morley	1887	Cleveland	11,0	0,40	0,01
Morley e Miller	1902–1904	Cleveland	32,3	1,13	0,015
Miller	1921	Mt. Wilson	32,0	1,12	0,08
Miller	1923–1924	Cleveland	32,0	1,12	0,030
Miller (luce solare)	1924	Cleveland	32,0	1,12	0,014
Tomaschek (luce stellare)	1924	Heidelberg	8,6	0,3	0,02
Miller	1925–1926	Mt. Wilson	32,0	1,12	0,088
Kennedy	1926	Pasadena e Mt. Wilson	2,0	0,07	0,002
Illigworth	1927	Pasadena	2,0	0,07	0,0004
Piccard e Stahel	1927	Mt. Rigi	2,8	0,13	0,006
Michelson e altri	1929	Mt. Wilson	25,9	0,9	0,010
Joos	1930	Jena	21,0	0,75	0,002

Fonte. Da Shankland, McCuskey, Leone, e Kuerti, *Rev. Mod. Phys.*, **27**, 167 (1955).

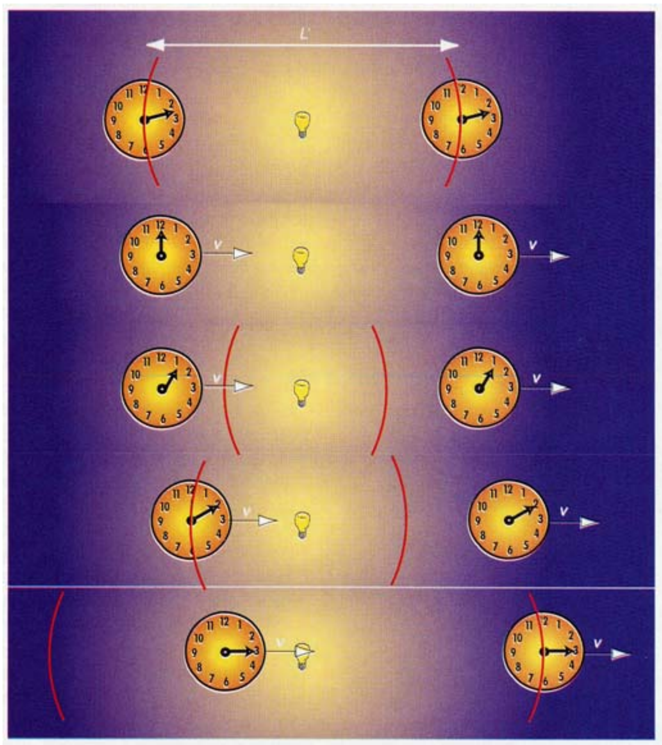


L'esperimento che doveva fornire la misura della velocità della Terra rispetto all'etere rivela che la velocità della luce è, nei limiti dell'esperimento, indipendente dallo stato di moto di rotazione e rivoluzione della Terra e indipendente anche per orientamento dell'apparato sperimentale.

Orologio a luce



A seconda dello stato di moto relativo dell'orologio a luce rispetto all'osservatore il tempo scorre a velocità differenti.
L'orologio meccanico in quiete rispetto all'orologio a luce vede l'impulso impiegare 1 secondo per andare dal basso e ritorno.
Quando invece l'orologio a luce è visto in movimento lo spazioe che deve percorrere il raggio è maggiore e il tempo impiegato è 2 secondi isurati dallo stesso orologio meccanico di prima.



Una lampada nel punto medio del segmento che congiunge due orologi emette un'impulso essendo orologi e lampada in quiete.
Se lo stesso evento è osservato mentre gli orologi (per esempio montati su un carrello) si muovono a velocità v verso destra, essendo la velocità della luce finita, i due fronti d'onda non giungono più simultaneamente agli orologi.
Il concetto di simultaneità non è più assoluto !

Trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Dilatazione dei tempi: vita media di un pione

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

Il pione è una particella radioattiva che in laboratorio ha una vita media $t = 1.77 \times 10^{-8} \sec$ ovvero "esplode" disintegrandosi in altre particelle e fotoni nel tempo indicato.

La vita media corrisponde al tempo in cui il numero di particelle si dimezza.

Se i pioni sono in movimento a velocità $v = 0.99c$ ci si aspetta che dopo il tempo $t = 1.77 \times 10^{-8} \sec$ il numero di particelle sia dimezzato; questo corrisponde allo spazio di volo $vt = 5.3m$

Solo dopo 39 m il numero di particelle è dimezzato.

Il motivo risiede nel fatto che osserviamo un "sistema pione" in movimento quindi dobbiamo vedere a quale nostro tempo corrisponde il suo tempo di dimezzamento

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{1.77 \times 10^{-8} \text{ s}}{\sqrt{1 - \dfrac{(0.99c)^2}{c^2}}} = 1.3 \times 10^{-7} \text{ s}$$

che corrisponde ad uno spazio di $vt = 39 \text{ m}$ in accordo con le misure

Addizione delle velocità

$$\begin{cases} u_{x'} = \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}} \\ u_{y'} = \dfrac{u_y \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}} \\ u_{z'} = \dfrac{u_z \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}} \end{cases}$$

Leggi della dinamica relativistica

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)$$

calcolo del teorema delle forze vive nell'ipotesi che la assa non sia costante ma dipenda dallo stato di moto

$$E_c = \int_0^u \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^u d(mu)u$$

$$E_c = \int_0^u (mdu + udm)u = \int_0^u (mudu + u^2dm)$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \text{ da cui } m^2 = \frac{m_0{}^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} \text{ da cui infine } m^2c^2 - m^2u^2 = m_0{}^2c^2$$

differenziando rispetto a m e u si ha

$$2mc^2dm - m^2 2udu - 2mu^2dm = 0$$

che semplificando diventa

$$c^2dm = mudu + u^2dm$$

Tornando al teorema delle forze vive si ha

$$E_c = \int_0^u (mudu + u^2dm) = \int_0^u c^2dm = c^2(m - m_0)$$

$$E_c = mc^2 - m_0c^2$$

da cui il fondamentale legame energia totale=energia cinetica più energia a riposo m_0c^2

$$E_{tot} = mc^2 = E_c + m_0c^2$$

Possiamo anche ricavare il legame fra energia cinetica e velocità dell'oggetto di massa a riposo m_0

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

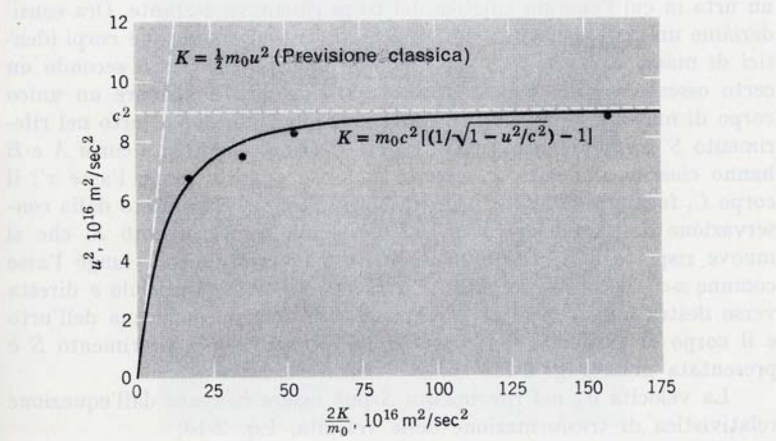


Fig. 3-5. Si vede che i punti sperimentali di Bertozzi stanno approssimativamente sulla curva (a tratto pieno) dell'espressione relativistica e non su quella (tratteggiata) dell'espressione classica per l'energia cinetica K in funzione di u^2.

$$E_c = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}c^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - 1\right]$$

http://musr.physics.ubc.ca/~jess/p200/emc2/node4.html

Conversion of Mass to Energy

Einstein's association of the term mc^2 with a **rest mass energy** E_0 naturally led to a great deal of speculation about what might be done to *convert* mass into useable energy, since for a *little* mass you get a *lot* of energy! Let's see just how much: in *S.I.* units 1 J $=$1 kg-m^2/s^2 so a 1 kg mass has a rest mass energy of (1 kg) $\times (2.9979 \times 10^8$ m/s $)^2 = 8.9876 \times 10^{16}$ J - *i.e.*

$$1 \text{ kg} \longleftrightarrow 8.9876 \times 10^{16} \text{ J} \qquad (E{=}mc^2.7)$$

which is a lot of joules. To get an idea how many, remember that one **watt** is a unit of *power* equal to one joule per second, so a **joule** is the same thing as a **watt-second**. Therefore a device converting *one millionth of a gram* (1 μg) of mass to energy *every second* would release approximately *90 megawatts* [millions of watts] of power!

Contrary to popular belief, the first conclusive demonstration of mass-energy conversion was in a controlled nuclear *reactor*. However, not long after came the more unpleasant manifestation of mass$\rightarrow$energy conversion: the fission bomb. An unpleasant subject, but one about which it behooves us to be knowledgeable. For this, we need a new energy unit, namely the **kiloton** [kt], referring to the energy released in the explosion of one thousand *tons* of TNT [**tri**nitro**t**oluene], a common chemical high explosive. The basic conversion factor is

$$1 \text{ kt} \equiv \text{ a trillion calories } = 4.186 \times 10^{12} \text{ J} \qquad (E{=}mc^2.8)$$

which, combined with Eq. ($E{=}mc^2.7$), g ives a rest-mass equivalent of

$$1 \text{ kt} \longleftrightarrow 4.658 \times 10^{-5} \text{ kg} \qquad (E{=}mc^2.9)$$

That is, one **kiloton**'s worth of energy is released in the conversion of 0.04658 grams [46.58 mg] of mass. Thus a **megaton** [equivalent to one million tons of TNT or 10^3kt] is released in the conversion of 46.58 grams of mass; and the largest thermonuclear device [bomb] ever detonated, about 100 megatons' worth, converted some 4.658 kg of mass directly into raw energy.

Nuclear Fission

Where did the energy come from? *What* mass got converted? To answer this question we must look at the processes involved on a sub-microscopic scale. First we must consider the natural tendency for oversized atomic nuclei to spontaneously *split* into smaller components. This process is known as **nuclear fission** and is the energy source for all presently functioning **nuclear reactors** on Earth. [Also for so-called ``atomic'' bombs.]

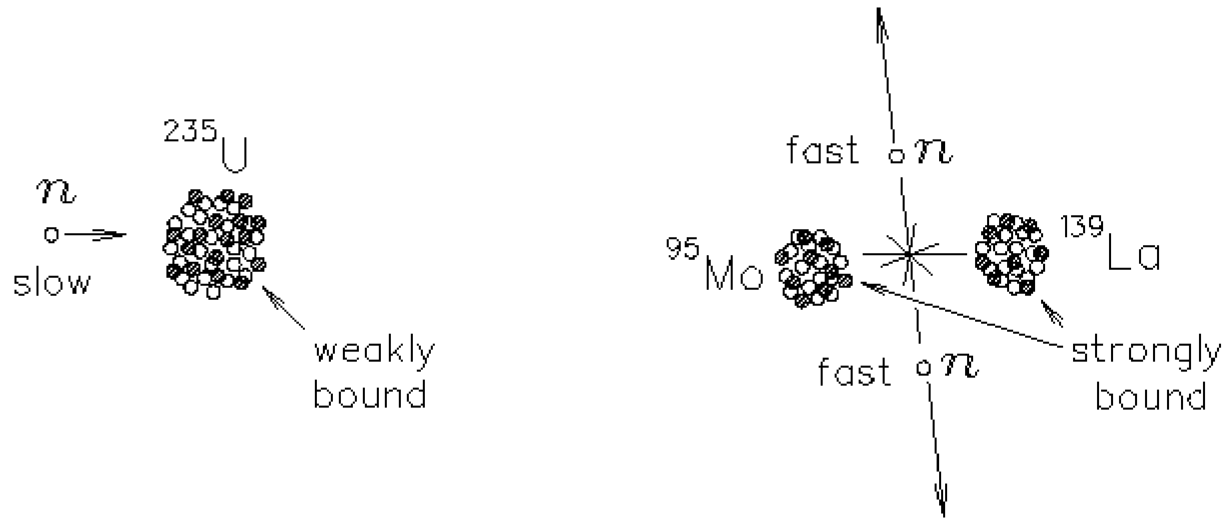


Figure: One case of the fission of ^{236}U. The net mass of the initial neutron plus the ^{235}U nucleus is 219,883 MeV/c^2. The net mass of the fission products (two neutrons, a ^{95}Mo nucleus and a ^{139}La nucleus) is 219,675 MeV/c^2 -- smaller because of the stronger *binding* of the Mo and La nuclei. The ``missing mass'' of 208 MeV/c^2 goes into the *kinetic energy* of the *fragments* (mainly the *neutrons*), which of course adds up to 208 MeV.

The basic event in the most common variety of **nuclear fission** is the spontaneous splitting of one ^{236}U nucleus into (for example) ^{95}Mo, ^{139}La and two neutrons. [There are numerous other possible fission products. This is just one case.] The fraction of the total mass that gets converted into kinetic energy is $208/219833 = 0.946 \times 10^{-3}$ or about a tenth of a percent. The energy liberated in the fission of one ^{236}U nucleus produced in this way is 208 MeV or 0.333×10^{-4} J. That means it takes 30,000 such fissions to produce one joule of utilizable energy. Since there are 2.55×10^{24} such nuclei in one gram of pure ^{235}U metal, 30,000 isn't such a large number!

What sort of *control* do we have over this process? To answer this question we must understand a bit more about the details of the **chain reaction** whereby an appreciable number of such fissions take place.

The ^{236}U nucleus is formed by adding one neutron to a ^{235}U nucleus, which is found in natural uranium ore on Earth at a concentration of about 0.72% [the rest is almost all ^{238}U]. Now, left to its own devices (*i.e.* if we don't drop any slow neutrons into it) a ^{235}U nucleus will live for an average of 0.7038 billion years, eventually decaying spontaneously by αparticle emission (*not* the fission reaction that produces more neutrons!) just like its brother isotope ^{238}U, whose lifetime is only about 6 times longer (4.468 billion years). If the lifetimes weren't so long, there wouldn't be any left on Earth to dig up - which might be regarded as a good thing overall, but we have to play the hand we're dealt. So an isolated ^{235}U nucleus generally sits around doing nothing and minding its own business; but when a slow *neutron* comes by (picture a ball bearing slowly rattling down through a peg board) it has a strong tendency to be *captured* by the ^{235}U nucleus to form ^{236}U, and then the action starts. This is also a little tricky, because if the ^{236}U nucleus gets a chance to settle into its *ground state* (, if all the jiggling and vibrating caused by absorption of a neutron has a chance to die down) then it (the ^{236}U nucleus) is also quite stable [mean lifetime = 23.42 million years] and also decays by αemission (no new neutrons). However, this is rarely the case; usually the excitations caused by absorbing that extra neutron are too much for the excited ^{236}U nucleus and it *fissions* as described earlier, releasing several not-too-fast neutrons.

What follows depends upon the neighbourbood in which the fission occurs. If the original ^{235}U nucleus is off by itself somewhere, the two neutrons just escape, rattle around until they lose enough energy to be captured by some less unstable nuclei, and the process ends. If the fission occurs right next to some *other* ^{235}U nuclei, then the outcome depends (critically!) upon the **moderation** [slowing down] of the neutrons: when they are emitted in the fission process, they are much too fast to be captured by other ^{235}U nuclei and will just escape to bury themselves eventually in some innocuous nuclei ensewhere. If, however, we run them through some

moderator [slower-downer] such as graphite, heavy water (deuterium oxide, D_2O) or, under extreme conditions of density and pressure, uranium metal itself, the neutrons will slow down by a sort of frictional drag until they reach the right energy to be captured efficiently by other ^{235}U nuclei. Then we get what is known as a **chain reaction**. One neutron is captured by a ^{235}U nucleus which splits up into fission products including fast neutrons, which are moderated until they can be captured by other ^{235}U nuclei, which then split up into fission products including fast neutrons, which are....

The moderation of the neutrons generates a lot of *heat* in the moderator (it is a sort of *friction*, after all) which can be used in turn to boil water to run steam turbines to generate electricity. [Or misused to make a large explosion.] A good fission **reactor** design (like the Canadian CANDU reactor) involves a moderator like heavy water (D_2O) which boils away when the reactor core overheats, thus stopping the moderation and automatically shutting down the reactor. A bad design (like the Soviet or American reactors) uses **moderator rods** that are shoved into the core mechanically and can get stuck there if the core overheats, as happened at Three Mile Island and (much worse) at Chernobyl.