

ESAMI DI MATURITÀ SCIENTIFICA SPERIMENTALE 1995

Trascrizione del testo e redazione delle soluzioni di Paolo Cavallo.

La prova

Tema di Fisica

In un laboratorio un ago magnetico è libero di ruotare ed è collocato al centro di una spira circolare di rame posta in posizione verticale e avente raggio 5 cm. In condizione di equilibrio, se nella spira non passa alcuna corrente, la direzione dell'ago coincide con la proiezione verticale della spira.

Il candidato calcoli in tesla la componente orizzontale dell'induzione magnetica terrestre all'interno del laboratorio avendo osservato che, quando la spira è attraversata dalla corrente d'intensità 1 A, l'ago effettua una rotazione formando un angolo di 25 gradi con il piano della spira.

Quesito di Fisica

In un cantiere si devono sollevare carichi da 50 kg ciascuno a 20 metri di altezza ma, per un guasto al sistema elettrico, è necessario ricorrere ad un motore in cc alimentato da una batteria nuova di automobile da 12 V e 40 Ah.

Il candidato valuti la potenza minima accettabile per il motore e calcoli il numero di carichi che potranno essere sollevati prima di esaurire la batteria, sapendo che:

1. la batteria è nuova e perfettamente carica,
2. il motore impiega un minuto per sollevare ciascun carico,
3. il sistema ha un rendimento del 60%.

La soluzione

Tema di Fisica

Quando nella spira non passa alcuna corrente, la direzione dell'ago coincide evidentemente con quella della componente orizzontale del campo magnetico terrestre $\vec{B}_0$, o induzione magnetica terrestre. A questo proposito, conviene notare come il termine tradizionale di "induzione magnetica" per indicare il campo $\vec{B}$, anche se perfettamente corretto, sta scomparendo dall'uso corrente almeno nella Scuola Secondaria; forse è bene prendere in considerazione la possibilità che gli studenti lo incontrino in un contesto come questo, e segnalare loro in qualche occasione la doppia denominazione. È importante fare in modo che non si corra il pericolo di fraintendimento con il fenomeno dell'*induzione elettromagnetica*, che è naturalmente del tutto differente.

Al passare di una corrente continua i nella spira, si stabilisce all'interno di questa un ulteriore campo magnetico $\vec{B}_S$ generato dalla corrente stessa. Nei punti sull'asse della spira tale campo magnetico è diretto lungo l'asse e quindi è perpendicolare al campo $\vec{B}_0$. La sua intensità è data dall'espressione:

$$B(y) = \frac{\mu_0 i R^2}{2\sqrt{(R^2 + y^2)^3}} \quad (1)$$

dove R è il raggio della spira e y è la distanza del punto sull'asse dal centro della spira.

Si tratta di un'espressione ben nota e di notevole importanza. Per ricavarla, occorre integrare sulla spira il contributo $d\vec{B}$ di ogni elemento di lunghezza ds , contributo dato dalla legge di Biot-Savart. Non è certo una derivazione alla portata di un normale candidato all'Esame, per cui bisogna concludere che l'estensore della prova ipotizzasse che il candidato sapesse citare la formula a memoria.

L'ago magnetico si trova nel piano della spira, per cui $y = 0$. L'intensità del campo magnetico in tale posizione risulta:

$$B_S = \frac{\mu_0 i}{2R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \cdot 1\text{A}}{2 \cdot 0,05\text{m}} = 12,6 \mu\text{T}. \quad (2)$$

È difficile dare una regola certa per il numero di cifre significative con cui va espresso il risultato delle operazioni numeriche. Il testo fornisce dati interi, che sembrano avere il significato di valori puramente teorici, senza limiti di precisione. In queste condizioni, sembra ragionevole suggerire di esprimere il risultato con tre o quattro cifre significative.

All'equilibrio, l'ago magnetico si disporrà parallelamente alla direzione del campo magnetico totale, dato dalla somma vettoriale:

$$\vec{B}_{tot} = \vec{B}_0 + \vec{B}_S. \quad (3)$$

I vettori $\vec{B}_0$ e $\vec{B}_S$ rappresentano i cateti di un triangolo rettangolo avente ipotenusa uguale a $\vec{B}_{tot}$. Il testo afferma che l'angolo opposto al cateto $\vec{B}_S$ vale 25° . Di conseguenza, il rapporto fra i due cateti dev'essere uguale alla tangente trigonometrica di tale angolo:

$$\tan(25^\circ) = \frac{B_S}{B_0}$$

da cui ricaviamo il valore di B_0 , come richiesto:

$$B_0 = \frac{B_S}{\tan(25^\circ)} = \frac{12,6 \mu\text{T}}{0,466} = 26,9 \mu\text{T}. \quad (4)$$

Quesito di Fisica

La potenza che deve avere il motore richiesto può essere ricavata dalla condizione 2. Se il motore solleva un carico di 50 kg ad un'altezza di 20 m in un minuto, deve fornire una potenza utile pari almeno a:

$$P_u = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \circ \Delta \vec{s}}{\Delta t} = \frac{m g \Delta h}{\Delta t} = \frac{50 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 20 \text{ m}}{60 \text{ s}} = 163 \text{ W}. \quad (5)$$

La potenza utile è una frazione, pari al 60%, della potenza totale P_t erogata dalla batteria al motore:

$$P_t = \frac{P_u}{60\%} = \frac{163 \text{ W}}{0,60} = 272 \text{ W}. \quad (6)$$

Il motore si comporta come un carico resistivo in corrente continua che assorbe una potenza P_t quando ai suoi capi è stabilita una differenza di potenziale $\Delta V = 12 \text{ V}$. Possiamo applicare perciò la relazione di Joule

$$P = \Delta V \cdot I$$

per determinare la corrente I assorbita dal motore:

$$I = \frac{P_t}{\Delta V} = \frac{272 \text{ W}}{12 \text{ V}} = 22,7 \text{ A}. \quad (7)$$

La batteria è in grado di erogare una quantità di carica Q complessivamente pari a una corrente di intensità 40 A che fluisce per 1 ora:

$$Q = 40 \text{ A} \cdot 3600 \text{ s} = 144 \text{ kC}.$$

Se il motore assorbe una corrente di 22,7 A, il tempo impiegato dalla batteria per esaurirsi risulta

$$\Delta t = \frac{Q}{I} = \frac{144 \text{ kC}}{22,7 \text{ A}} = 6344 \text{ s} = 106 \text{ min}. \quad (8)$$

Poiché il motore solleva un carico al minuto, questo è anche il numero di carichi sollevati.

A questo punto è indispensabile muovere al testo un'osservazione che non dovrebbe mancare neppure nello svolgimento del quesito da parte del candidato. Il problema è stato risolto in base alle ipotesi del testo, ma è necessario far notare che tali ipotesi sono del tutto irrealistiche. È necessario infatti ipotizzare che la batteria continui a erogare la corrente I e a stabilire la differenza di potenziale ΔV da noi calcolate per tutta la durata del suo funzionamento. Ora, noi sappiamo che questo non è possibile. Se il regime da noi determinato può venire realizzato all'inizio, quando la batteria "è nuova e perfettamente carica", ben presto la batteria inizierà a perdere efficienza e i valori effettivi di corrente

e tensione caleranno progressivamente. L'idea di una batteria che funziona in maniera ideale fino ad esaurirsi all'improvviso costituisce una schematizzazione poco realistica, necessaria a risolvere il problema, ma tale da rendere poco significativo in pratica il risultato ottenuto.

Lo stesso problema può essere risolto per un'altra strada. La batteria può essere trattata come un sistema che porta una quantità di carica Q a una differenza di potenziale ΔV , e quindi un sistema che fornisce un'energia potenziale elettrostatica

$$U = Q \cdot \Delta V = 144 \text{ kC} \cdot 12 \text{ V} = 1,73 \text{ MJ}. \quad (9)$$

L'energia è utilizzata dal motore con un'efficienza del 60%, per cui il lavoro complessivamente svolto dal motore risulta:

$$W = 0,60 \cdot U = 0,60 \cdot 1,73 \text{ MJ} = 1,04 \text{ MJ}. \quad (10)$$

Ad ogni carico il lavoro compiuto è $w = m g \Delta h = 9,8 \text{ kJ}$, per cui il numero complessivo di carichi realizzabili risulta:

$$N = \frac{W}{w} = \frac{1,04 \text{ MJ}}{9,8 \text{ kJ}} = 106 \quad (11)$$

risultato che coincide naturalmente con quello (vedi eq. 8) precedentemente ottenuto per altra strada. Per questo secondo metodo, comunque, valgono le stesse osservazioni già esposte a proposito della scarsa plausibilità.

ESAMI DI MATURITÀ SCIENTIFICA SPERIMENTALE 1996

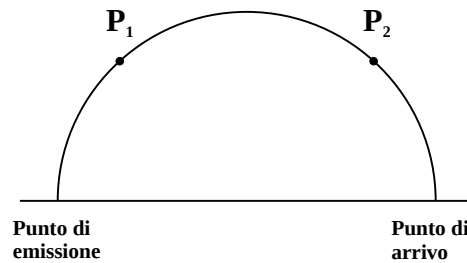
Trascrizione del testo e redazione delle soluzioni di Paolo Cavallo.

La prova

Tema 1

Una particella α ($q = 3,2 \cdot 10^{-19}$ C, $m = 6,7 \cdot 10^{-27}$ kg), emessa da una sostanza radioattiva, descrive nel vuoto una traiettoria semicircolare di raggio $r = 10$ cm a causa di un campo magnetico d'induzione $B = 0,8$ T.

Il candidato calcoli in eV l'energia cinetica con cui è stata emessa la particella e disegni, nei punti P_1 e P_2 , i vettori $\vec{v}$, $\vec{B}$, $\vec{F}$ nella figura che descrive la sua traiettoria.



Tema 2

Un recipiente cilindrico, a pareti riflettenti e pieno d'acqua, ha sul fondo, al centro, una sorgente luminosa puntiforme S che emette raggi di luce in tutte le direzioni. Per il fenomeno della riflessione totale, dall'acqua emerge un cono di luce che sulla superficie di separazione acqua-aria ha una sezione luminosa circolare di diametro $d = 20$ cm.

Il candidato calcoli l'indice di rifrazione dell'acqua, sapendo che la sua profondità dentro il recipiente è $h = 88$ mm.

La soluzione

Tema 1

Sia per quanto riguarda l'uso del termine "campo magnetico di induzione", che per quanto riguarda il numero di cifre significative nei risultati numerici, si rimanda ai commenti riportati nella discussione della prova relativa all'anno 1995.

La forza agente su una particella di carica q in moto con velocità $\vec{v}$ in un campo magnetico $\vec{B}$ non è altro che la forza di Lorentz magnetica, data dall'espressione

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1)$$

la cui intensità è pari a

$$F = qvB_{\perp} \quad (2)$$

dove $B_{\perp}$ è la componente di $\vec{B}$ perpendicolare a $\vec{v}$, uguale al prodotto di B per il seno dell'angolo formato da $\vec{v}$ e $\vec{B}$. Se $\vec{B}$ è uniforme nella regione attraversata dalla particella, la forza di Lorentz ha dappertutto la stessa intensità ed è sempre perpendicolare alla velocità della particella. In altri termini, si comporta come una forza centripeta, sotto la cui azione la particella eseguirà un moto circolare uniforme. La velocità resterà costante in modulo per l'intero moto, in quanto la forza di Lorentz (1) non compie lavoro sulla particella e quindi non ne cambia l'energia.

Il testo della prova non specifica se il campo $\vec{B}$ è uniforme né qual è l'angolo da esso formato con la velocità della particella. Il fatto che si dica che la traiettoria è circolare sembra implicare che il candidato debba dare per scontata la prima ipotesi. Quanto all'angolo, dobbiamo osservare che il problema non risulta determinato se questo va considerato incognito. È ragionevole pensare che anche in questo caso si debba dare per scontata un'ipotesi, vale a dire, che $\vec{v}$ e $\vec{B}$ siano perpendicolari. Questa ipotesi è ragionevole anche perché questa sarebbe la scelta adottata dallo sperimentatore che volesse servirsi della configurazione descritta per misurare l'energia della particella. Poiché il testo della prova non lo fa, il candidato dovrebbe enunciare esplicitamente le due ipotesi.

La forza centripeta in un moto circolare uniforme può essere scritta nella forma:

$$F = m \frac{v^2}{r} \quad (3)$$

dove m è la massa del punto materiale in moto, v la sua velocità e r il raggio della traiettoria. Ponendo la forza di Lorentz (2) uguale alla forza centripeta (3):

$$qvB = m \frac{v^2}{r}$$

possiamo ricavare un'espressione che ci permette di calcolare la velocità della particella:

$$v = \frac{qBr}{m} = \frac{3,2 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,8 \text{ T} \cdot 0,10 \text{ m}}{6,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = 3,82 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (4)$$

Il valore di v risulta molto inferiore al valore $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ della velocità della luce nel vuoto. Questo giustifica a posteriori la nostra scelta di svolgere una trattazione non relativistica del problema.

Sempre in base a questa osservazione, utilizziamo l'espressione non relativistica per calcolare l'energia cinetica della particella, come richiesto:

$$K_J = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 6,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \left(3,82 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = 4,89 \cdot 10^{-14} \text{ J}. \quad (5)$$

Il testo richiede che tale valore sia espresso in elettronvolt. Più che citare semplicemente il valore di un elettronvolt in joule, può essere interessante determinarlo a partire dalla definizione: 1 eV è l'energia potenziale elettrica a disposizione di una particella di carica pari alla carica elementare $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ sottoposta a una differenza di potenziale di 1 V:

$$(1 \text{ eV})_J = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

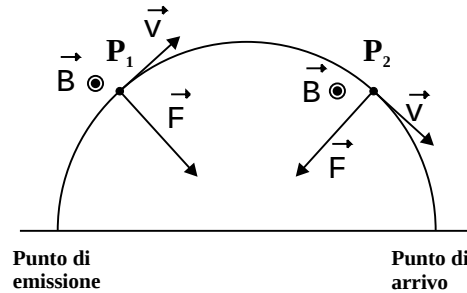
Sostituendo questo valore nella (5) otteniamo il risultato richiesto:

$$K_{eV} = \frac{K_J}{\frac{(1 \text{ eV})_J}{1 \text{ eV}}} = \frac{4,89 \cdot 10^{-14} \text{ J}}{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}} \cdot 1 \text{ eV} = 3,05 \text{ MeV}. \quad (6)$$

Per quanto riguarda la richiesta di tracciare sulla traiettoria, in due punti predeterminati, i vettori $\vec{v}$, $\vec{F}$ e $\vec{B}$, osserviamo semplicemente che:

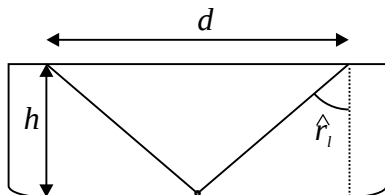
- la velocità deve essere sempre tangente alla traiettoria;
- la forza deve essere sempre radiale e diretta verso il centro della traiettoria;
- tenendo conto del segno della carica e della regola della mano destra, il campo magnetico deve essere uscente dal piano del foglio;
- il modulo di ciascun vettore deve rimanere lo stesso lungo la traiettoria.

Otteniamo perciò la figura seguente:



Tema 2

La situazione descritta dal testo può essere illustrata con il seguente schema:



dove $\hat{r}_l$ è l'angolo limite di rifrazione dall'acqua all'aria (praticamente uguale a quello dall'acqua al vuoto).

Dalla figura ricaviamo immediatamente che:

$$\tan(\hat{r}_l) = \frac{d/2}{h}$$

per cui

$$\hat{r}_l = \arctan\left(\frac{d/2}{h}\right) = \arctan\left(\frac{10 \text{ cm}}{8,8 \text{ cm}}\right) = \arctan(1,136) = 0,849 \text{ rad.} \quad (7)$$

Dalla legge di Snell

$$\sin(\hat{i}) = n \sin(\hat{r}) \quad (8)$$

ponendo $\hat{r} = \hat{r}_l$ e $\hat{i} = \frac{\pi}{2}$ rad si ricava l'indice di rifrazione:

$$n = \frac{1}{\sin(\hat{r})} = \frac{1}{\sin(0,849 \text{ rad})} = \frac{1}{0,751} = 1,33. \quad (9)$$

A rigore, quello che abbiamo ricavato è l'indice di rifrazione dell'acqua *relativo all'aria*. Ma, come è noto, gli indici di rifrazione relativi all'aria differiscono molto poco dagli indici relativi al vuoto, cioè dagli indici di rifrazione *assoluti*. Possiamo quindi affermare che l'indice di rifrazione dell'acqua risulta pari a 1,33, un risultato probabilmente già noto al candidato.

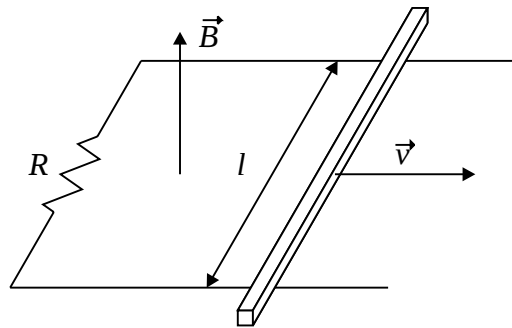
ESAMI DI MATURITÀ SCIENTIFICA SPERIMENTALE 1997

Trascrizione del testo e redazione delle soluzioni di Paolo Cavallo.

La prova

Tema1

Una sbarretta conduttrice scorre su due guide metalliche parallele appoggiate sopra un piano orizzontale. Esse distano tra di loro $l = 20\text{ cm}$ e sono collegate da un conduttore di resistenza $R = 2\ \Omega$. Sapendo che la sbarretta si muove in un campo magnetico con $\vec{B}$ di intensità $0,5\text{ T}$, perpendicolare al piano ed orientato come in figura, calcolare:



- la d.d.p. indotta agli estremi della sbarretta in mV,
- l'intensità di corrente in mA che l'attraversa,
- la forza di attrito, sapendo che la sbarretta si muove con velocità costante $v = 20\text{ cm/s}$.

Il candidato presenti la risoluzione sotto forma di relazione scientifica, descrivendo e motivando i passaggi intermedi.

Tema 2

Il candidato spieghi l'effetto fotoelettrico descrivendone almeno un'applicazione. Calcoli poi in eV la massima energia cinetica che possono avere gli elettroni emessi da una superficie investita da una radiazione elettromagnetica di lunghezza d'onda $\lambda = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m}$, sapendo che la lunghezza d'onda di soglia è $\lambda_0 = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.

Il candidato presenti la risoluzione sotto forma di relazione scientifica, descrivendo e motivando i passaggi intermedi.

La soluzione

Tema 1

Nella situazione descritta dal testo, il flusso Φ del campo magnetico $\vec{B}$, attraverso una qualsiasi superficie avente il circuito come bordo, varia nel tempo. In base alla legge di Faraday-Neumann-Lenz, nel circuito si stabilisce allora una *forza elettromotrice indotta* ε_{ind} , la quale produce a sua volta una corrente indotta i_{ind} nel circuito. Il verso della corrente indotta è tale da generare un secondo campo magnetico B' tale da opporsi alla variazione del flusso Φ .

La legge di Faraday-Neumann-Lenz può essere scritta in forma matematica come:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \quad (1)$$

Poiché il campo magnetico $\vec{B}$ attraverso il circuito è uniforme e costante nel tempo, la variazione $\Delta\Phi$ del flusso relativo in un intervallo di tempo Δt è dovuta soltanto alla variazione ΔS dell'area sulla quale si calcola il flusso. Se come area su cui si calcola il flusso viene scelta, come è naturale, l'area del rettangolo delimitato dal resistore di resistenza R , dalla sbarretta e dalle guide metalliche, nell'intervallo Δt quest'area varia, per effetto del moto della sbarretta, di una quantità uguale al rettangolo spazzato dalla sbarretta in movimento. Tale rettangolo ha dimensioni pari rispettivamente a l e $\Delta s = v \cdot \Delta t$, per cui:

$$\Delta S = l \cdot v \cdot \Delta t. \quad (2)$$

La variazione del flusso di $\vec{B}$ risulta pertanto uguale al flusso attraverso ΔS ; ricordando che $\vec{B}$ è uniforme e perpendicolare alla superficie del circuito, e utilizzando la (2):

$$\Delta\Phi = \vec{B} \cdot \Delta\vec{S} = B \cdot \Delta S = B \cdot l \cdot v \cdot \Delta t. \quad (3)$$

Sostituendo la (3) nella (1), otteniamo la seguente espressione della forza elettromotrice indotta:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -B \cdot l \cdot v = -0,5 \text{ T} \cdot 0,20 \text{ m} \cdot 0,20 \text{ m/s} = -20 \text{ mV}. \quad (4)$$

Il segno meno di questo risultato va inteso in questo senso: guardando il circuito dalla direzione individuata dal vettore $\vec{B}$, la forza elettromotrice indotta genera una corrente che scorre nel circuito in senso negativo, cioè in senso *orario*. In base alla prima regola della mano destra, è facile rendersi conto che tale corrente indotta genera a sua volta un campo magnetico $\vec{B}'$ diretto come $\vec{B}$ ma avente verso opposto. Tale nuovo campo magnetico agisce quindi in modo da *diminuire* il flusso totale attraverso la superficie del circuito, opponendosi all'*aumento* del flusso dovuto al moto della sbarretta. Questo è proprio ciò che prevede la legge di Lenz.

L'intensità della corrente indotta i_{ind} può essere determinata supponendo (come è ragionevole in base al testo) che la resistenza del tratto R sia molto maggiore di quella offerta dal resto del circuito. Possiamo allora supporre che la forza elettromotrice sia praticamente uguale alla caduta di tensione ai capi del resistore, data a sua volta dalla legge di Ohm:

$$\varepsilon_{ind} = R \cdot i_{ind}. \quad (5)$$

Richiamando la (4) e risolvendo la (5) in funzione di i_{ind} giungiamo finalmente al valore:

$$i_{ind} = \frac{\varepsilon_{ind}}{R} = \frac{20 \text{ mV}}{2 \Omega} = 10 \text{ mA} \quad (6)$$

dove abbiamo ignorato il segno meno che compare nella (4), poiché siamo interessati esclusivamente alle intensità. Il segno avrebbe comunque un significato analogo a quello già discusso: percorrendo il circuito in senso *antiorario*, incontriamo prima il capo del resistore a potenziale più basso.

Sempre ignorando la caduta di tensione nei tratti di guida metallica che chiudono il circuito, la d.d.p. ai capi della sbarretta deve essere uguale alla caduta di tensione ai capi di R , pari dunque a 20 mV.

Questo risultato merita una discussione più approfondita. Possiamo chiederci qual è l'origine della forza elettromotrice che si stabilisce sul circuito. Osserviamo allora che gli elettroni di conduzione presenti nella sbarretta sono in moto rispetto al campo magnetico esterno $\vec{B}$. Di conseguenza, essi sono soggetti a una forza di Lorentz, data dalla legge:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}, \quad (7)$$

che imprime loro un moto longitudinale alla sbarretta. In questo modo gli elettroni si spostano verso un estremo della sbarretta, così che ai capi di questa viene a stabilirsi la differenza di potenziale da noi determinata. Si potrebbe concludere che sia la forza di Lorentz a compiere lavoro sugli elettroni e in ultima analisi a generare la forza elettromotrice (che è definita, lo ricordiamo, come il rapporto fra il lavoro eseguito sulle cariche e il valore delle cariche stesse). In realtà la faccenda è più complicata, in quanto la forza di Lorentz (7) è ad ogni istante perpendicolare al moto degli elettroni e quindi non può compiere lavoro su di essi. Per un'analisi completa della situazione, sarebbe indispensabile prendere in considerazione le forze di natura elettrica esercitate dal reticolo cristallino sugli elettroni.

Questo non è in definitiva necessario. A compiere davvero lavoro sul sistema è naturalmente la forza esterna $\vec{F}_{ext}$ che tiene in movimento la sbarretta. È questa forza che fornisce l'energia necessaria a far muovere gli elettroni nel circuito, energia che viene loro continuamente sottratta per effetto Joule e quindi, in ultima analisi, per i processi che tendono a far aumentare la temperatura del circuito e in particolare del resistore.

L'effetto Joule può essere quantificato mediante la potenza dissipata al passaggio della corrente attraverso il resistore:

$$P = \Delta V \cdot i. \quad (8)$$

La potenza P deve essere fornita dal lavoro eseguito dalla forza esterna $\vec{F}_{ext}$ sul centro di massa della sbarretta, che si muove alla velocità $\vec{v}$ e in un intervallo Δt esegue uno spostamento $\Delta \vec{s} = \vec{v} \cdot \Delta t$. Poiché la potenza fornita è definita dal rapporto fra il lavoro W eseguito e l'intervallo di tempo impiegato, otteniamo:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\vec{F}_{ext} \circ \Delta \vec{s}}{\Delta t} = \frac{\vec{F}_{ext} \circ \vec{v} \cdot \Delta t}{\Delta t} = F_{ext} \cdot v. \quad (9)$$

Uguagliando la (8) e la (9) e risolvendo in funzione di F_{ext} otteniamo:

$$F_{ext} = \frac{\Delta V \cdot i}{v} = \frac{20 \text{ mV} \cdot 10 \text{ mA}}{0,20 \text{ m/s}} = 1,0 \text{ mN}. \quad (10)$$

Il testo del problema richiede il calcolo della forza di attrito sulla sbarretta. Non è chiaro quale sia in questo caso l'intenzione dell'estensore della prova. Naturalmente, dato che la sbarretta si muove di moto rettilineo uniforme, la forza totale su di essa deve essere zero. Pertanto, sulla sbarretta deve agire una "forza di attrito" uguale alla forza esterna motrice. Ma qual è la natura fisica di questa forza? Possiamo prendere in considerazione due eventualità:

1. per "forza di attrito" si intende la sola forza $i \cdot \vec{l} \times \vec{B}$ che il campo magnetico imprime sulla sbarretta quando in essa si stabilisce una corrente: per la regola della mano destra, questa forza magnetica si oppone al moto della sbarretta e quindi si oppone alla forza motrice $\vec{F}_{ext}$, comportandosi come una forza resistente o di attrito;
2. oltre a questa forza resistente di origine magnetica, deve intendersi presente anche una forza di attrito meccanico fra la sbarretta e le guide metalliche su cui scivola; se è presente questa seconda forza di attrito, deve essere presente un'ulteriore forza motrice esterna che la equilibri.

Nell'ipotesi 1. la forza di attrito è uguale e opposta alla forza motrice esterna che sostiene la forza elettromotrice indotta. Abbiamo già quantificato tale forza in 1,0 mN, quindi la forza di attrito vale anch'essa 1,0 mN. Nell'ipotesi 2. il problema è indeterminato. Siamo in grado di determinare la forza esterna necessaria a fornire lavoro elettrico al sistema, ma non sappiamo come determinare la forza necessaria a fornire l'energia cinetica consumata dalla forza di attrito meccanico. In assenza di una "interpretazione autentica", non possiamo andare oltre queste osservazioni, né avrebbe potuto farlo il candidato.

Tema 2

L'effetto fotoelettrico può essere messo in evidenza utilizzando un opportuno tubo a vuoto con due elettrodi connessi a una pila che mantiene fra essi una differenza di potenziale assegnata. Poiché i due elettrodi sono isolati, nel circuito così costituito non passa alcuna corrente. Ma se il catodo (l'elettrodo connesso al polo negativo della pila) è costituito da una piastrina metallica, è possibile far passare una corrente nel circuito illuminando il catodo con una sorgente di radiazione elettromagnetica, visibile o ultravioletta. Finché la lunghezza d'onda della radiazione impiegata è *superiore* a un certo valore λ_0 , detto lunghezza d'onda di soglia, nel circuito non si osserva alcuna corrente, qualunque sia l'intensità della sorgente impiegata. La corrente passa soltanto se la radiazione ha una lunghezza d'onda uguale o inferiore a λ_0 .

Dal punto di vista dell'elettromagnetismo classico, questo è effetto è sconcertante. Se nel circuito si stabilisce una corrente, possiamo ipotizzare che il catodo illuminato emetta elettroni, in maniera simile a quello che avviene nell'effetto termoionico. L'energia necessaria ad abbandonare il catodo, indicata come *funzione lavoro* W , deve evidentemente essere fornita agli elettroni dalla radiazione incidente. Ma secondo l'elettromagnetismo classico l'energia della radiazione non dipende dalla lunghezza d'onda. In altri termini, con una sorgente di radiazione abbastanza intensa, si dovrebbe osservare un passaggio di corrente per qualunque valore della lunghezza d'onda. L'esistenza di un effetto di soglia resta inspiegabile.

L'effetto fotoelettrico fu spiegato da Einstein nel 1905 in base all'ipotesi dei quanti di luce, già avanzata in altra forma da Planck cinque anni prima a proposito del problema del corpo nero. Planck aveva proposto di *quantizzare* gli scambi di energia fra radiazione e materia, ipotizzando che essi potessero avvenire soltanto per multipli di un'energia minima, data dal prodotto della costante h (oggi nota come *costante di Planck*) per la frequenza f della radiazione. Einstein estende l'ipotesi di Planck, proponendo di quantizzare la radiazione stessa e di considerarla come composta di *quanti di luce* aventi energia hf . Indicheremo questi quanti con il nome di *fotoni*, assegnato loro soltanto in seguito. Ogni fotone ha quindi un'energia:

$$E_f = hf = \frac{hc}{\lambda}. \quad (11)$$

Einstein propose il seguente modello. Quando un fotone colpisce un elettrone nel metallo che costituisce il catodo, gli cede la propria energia hf . Se la frequenza del fotone è troppo bassa (ovvero, se la lunghezza d'onda è troppo alta), l'energia ceduta all'elettrone è inferiore a W e l'elettrone resta confinato nel metallo, dove negli urti con il reticolo cristallino perde immediatamente l'energia acquistata. Se invece f è uguale o superiore a una frequenza di soglia f_0 (ovvero, se λ è uguale o inferiore a $\lambda_0 = c/f_0$) l'elettrone acquista un'energia almeno sufficiente a lasciare il metallo e a muoversi nel campo elettrico esterno stabilito dalla pila. La condizione che determina λ_0 è allora semplicemente:

$$W = \frac{hc}{\lambda_0}. \quad (12)$$

L'effetto fotoelettrico è sfruttato in diversi dispositivi, fra cui le *cellule fotoelettriche* impiegate come interruttori sensibili alla luce nei circuiti che regolano

l'apertura di cancelli automatici o l'attivazione di sistemi di allarme. Quando la radiazione che illumina il catodo viene intercettata da un oggetto di passaggio, la corrente nel circuito si interrompe. La variazione di corrente può essere utilizzata come segnale che attiva il servomeccanismo di apertura di un cancello.

Per il principio di conservazione dell'energia, l'energia che l'elettrone possiede appena al di fuori del catodo deve essere uguale all'energia ceduta dal fotone, diminuita dell'energia W necessaria ad abbandonare il metallo e, eventualmente, dell'ulteriore energia persa per collisioni con gli atomi del metallo. L'energia che un elettrone possiede dopo essere sfuggito al metallo è quindi al più uguale a:

$$E_e = E_f - W. \quad (13)$$

Nelle ipotesi del testo $\lambda = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ e $\lambda_0 = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Il valore della costante di Planck nel Sistema Internazionale è $6,626 \text{ J} \cdot \text{s}$ (forse è ragionevole ipotizzare che l'estensore della prova preveda che il commissario possa fornire esplicitamente questo valore, come pure quello della velocità della luce nel vuoto, se il candidato non li ricorda a memoria). Sostituendo nella (13) le espressioni (11) e (12), otteniamo:

$$\begin{aligned} E_e &= \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_0} = hc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) = \\ &= 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 3,00 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot 10^{-7} \text{ m}} - \frac{1}{6 \cdot 10^{-7} \text{ m}} \right) = \\ &= 1,66 \cdot 10^{-19} \text{ J}. \end{aligned} \quad (14)$$

Poiché $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, l'energia così determinata vale:

$$E_e = 1,03 \text{ eV}.$$

ESAMI DI MATURITÀ SCIENTIFICA SPERIMENTALE 1998 Corsi Brocca a indirizzo Scientifico

Trascrizione del testo e redazione delle soluzioni di Paolo Cavallo.

La prova

Quesito 1

Un pennello di luce monocromatica emessa da un laser illumina perpendicolarmente una doppia fenditura praticata in uno schermo A. La distanza tra le due fenditure sia 0,1 mm.

Al di là della doppia fenditura e a una distanza di 2 m da A è disposto, parallelamente ad A, uno schermo B su cui si raccoglie la luce proveniente dalle due fenditure.

Calcolare la lunghezza d'onda della luce emessa dal laser se la distanza su B della frangia centrale luminosa dalla prima frangia laterale luminosa è di 10 mm.

Se il laser illumina una placca di cesio (frequenza di soglia per effetto fotoelettrico $\nu_0 = 4,34 \cdot 10^{14}$ Hz), si ha emissione di elettroni?

[massa dell'elettrone $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg, carica dell'elettrone $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, costante di Planck $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s, velocità della luce $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s]

Quesito 2

Il nucleo di un atomo di torio di massa 232,03714 *amu* (*atomic mass unit*, 1 *amu* = $1,6606 \cdot 10^{-27}$ kg) decade in un nucleo di radio di massa 228,02873 *amu* ed in una particella α di massa 4,00260 *amu*.

Determinare la massa che si trasforma in energia cinetica e – supposto in prima approssimazione che tutta l'energia cinetica sia acquisita dalla particella α – la velocità v con cui la particella α esce dalla disintegrazione.

Tale particella può considerarsi relativistica?

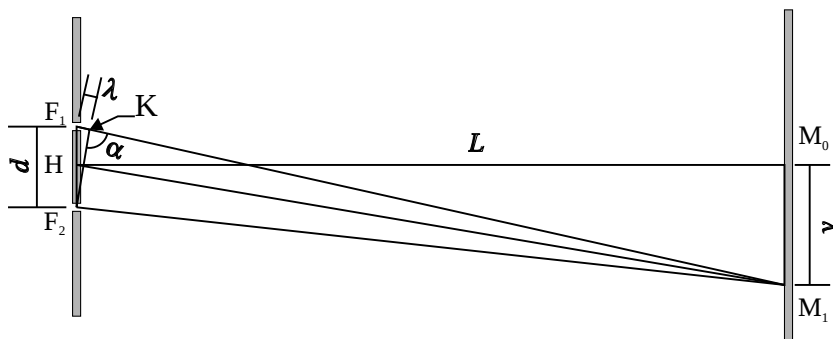
Quale deve essere l'intensità di un campo magnetico ortogonale alla velocità v perché la particella descriva una circonferenza di diametro 1 m supposto che la particella si muova nel vuoto?

[carica dell'elettrone $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, velocità della luce $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s]

La soluzione

Quesito 1

La situazione può essere illustrata con lo schema seguente:



I due cammini ottici $\overline{F_1M_1}$ e $\overline{F_2M_1}$ differiscono esattamente di una lunghezza d'onda, dato che M_1 è la prima frangia laterale luminosa, cioè è un massimo di interferenza. Il triangolo KM_1F_2 è quindi un triangolo isoscele. Se $L \gg d$, l'angolo in M_1 è molto piccolo, l'angolo α è con ottima approssimazione retto. Con lo stesso grado di approssimazione, il triangolo rettangolo HM_0M_1 è simile al triangolo (quasi) rettangolo F_2KF_1 . Inoltre, se $L \gg y$ il cateto L del primo rettangolo è approssimativamente uguale all'ipotenusa $\overline{OM_1}$. Le condizioni su L da noi poste sono soddisfatte nel caso discusso nel testo. Possiamo perciò scrivere:

$$\lambda : d = y : L$$

e infine ricavare un'espressione per la lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{d \cdot y}{L} = \frac{0,1 \text{ mm} \cdot 10 \text{ mm}}{2 \text{ m}} = 0,500 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 500 \text{ nm}. \quad (1)$$

Si tratta di un laser blu-verde.

Ripetiamo qui quanto già detto nella discussione della prova relativa all'Esame del 1995: poiché i dati numerici vengono forniti come se si trattasse di valori puramente matematici, senza alcuna indicazione della precisione sperimentale, non è possibile indicare un procedimento ben fondato per determinare il numero di cifre significative con cui fornire il risultato dei calcoli. Ci siamo attenuti anche in questo caso alla regola approssimativa di assumere all'incirca tre cifre significative di precisione nei risultati.

La frequenza del laser in esame risulta:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{500 \text{ nm}} = 6,00 \cdot 10^{14} \text{ Hz}. \quad (2)$$

Poiché ν è maggiore della frequenza di soglia ν_0 per effetto fotoelettrico del cesio, si ha effettivamente emissione di elettroni nel caso che il laser illumini una placca di questo metallo.

Osserviamo che per rispondere al quesito non abbiamo fatto uso di tre dei dati forniti in calce al testo, vale a dire la massa e la carica dell'elettrone e la costante

di Planck. Naturalmente, non è certo un errore fornire più dati del necessario, anche se questo non avrà mancato di confondere le idee ad alcuni candidati. Avanziamo l'ipotesi che l'estensore della prova avesse avuto all'inizio l'intenzione di porre un'ulteriore richiesta, quella di calcolare l'energia cinetica massima degli elettroni emessi dalla placca. In tal caso, infatti, i tre dati sarebbero risultati necessari. Potete leggere a questo proposito la discussione del secondo Tema nella prova relativa all'Esame del 1997.

Quesito 2

NOTA. Il testo originale parlava di un atomo di uranio che decade in un atomo di plutonio. Si trattava di un errore: poiché il plutonio ha numero atomico 94 e l'uranio 92, un decadimento α , che abbassa di due unità il numero atomico, non può evidentemente trasformare un nucleo di uranio in uno di plutonio.

Il decadimento (ricordiamo che una particella α non è altro che un nucleo di elio)



comporta, come tutte le reazioni nucleari spontanee, un *difetto di massa* Δm per cui la massa totale dei prodotti risulta *minore* della massa del nucleo instabile presente all'inizio. Questo implica che il sistema possa liberare energia (sotto forma di energia cinetica dei prodotti) attraverso il decadimento, motivo per cui il decadimento stesso avviene appunto spontaneamente. L'energia liberata è legata al difetto di massa dalla relazione di Einstein:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2. \quad (4)$$

È importante sottolineare che anche in una reazione chimica, come la scomposizione di una molecola instabile in due o più prodotti, è presente un difetto di massa. In tal caso, però, esso è di un'entità così limitata da non essere misurabile sperimentalmente. Nelle reazioni nucleari, invece, le energie coinvolte sono molto più alte e il difetto di massa è apprezzabile.

Nel nostro caso il difetto di massa è:

$$\begin{aligned} \Delta m &= m_{\text{Th}} - (m_{\text{Ra}} + m_{\text{He}}) = \\ &= 232,03714 \text{ amu} - (228,02873 \text{ amu} + 4,00260 \text{ amu}) = \\ &= 0,00581 \text{ amu} = 9,65 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \end{aligned} \quad (5)$$

per cui l'energia liberata è:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 9,65 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \cdot (3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 8,68 \cdot 10^{-13} \text{ J}. \quad (6)$$

Si tratta di un'energia molto elevata se paragonata a quella implicata da una reazione chimica. La ionizzazione di un atomo di idrogeno, ad esempio, richiede un'energia pari a circa $2 \cdot 10^{-18} \text{ J}$, circa sei ordini di grandezza inferiore alla (6).

Il testo chiede di ipotizzare che tale energia si manifesti come energia cinetica della sola particella α . Questo naturalmente non può essere del tutto vero, perché ciò implicherebbe che il nucleo di radio sia fermo dopo il decadimento, violando così il principio di conservazione della quantità di moto. In effetti, una

trattazione relativistica più accurata mostra che il nucleo di radio possiede un'energia di rinculo pari a circa il 2% dell'energia (6). In prima approssimazione, comunque, l'ipotesi proposta dal testo è pienamente accettabile.

L'energia di riposo della particella α vale $m_{\text{He}} \cdot c^2 = 5,98 \cdot 10^{-10} \text{ J}$. Poiché tale energia è molto maggiore dell'energia cinetica acquistata dalla particella, essa non deve considerarsi relativistica. Siamo quindi autorizzati a determinare la sua velocità a partire dall'espressione non relativistica dell'energia cinetica:

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta E}{m_{\text{He}}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,68 \cdot 10^{-13} \text{ J}}{6,65 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} = 1,62 \cdot 10^7 \text{ m/s.} \quad (7)$$

Tale velocità è pari a circa il 5% della velocità della luce, e ciò legittima a posteriori la nostra trattazione non relativistica. In effetti, la trattazione relativistica porta praticamente allo stesso valore, con una piccola differenza sulla terza cifra decimale.

Nella discussione del primo tema della prova d'Esame relativa all'anno 1996 abbiamo ricavato la relazione

$$qvB = m \frac{v^2}{r}$$

fra la forza di Lorentz e la forza centripeta su una particella di massa m , carica q e velocità $\vec{v}$ che descrive una traiettoria circolare di raggio r in una regione dove esiste un campo magnetico uniforme $\vec{B}$ perpendicolare a $\vec{v}$.

A partire da questa relazione possiamo ricavare l'intensità di $\vec{B}$ a partire dalle ipotesi del testo:

$$B = \frac{m \cdot v}{q \cdot r} = \frac{6,65 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 1,62 \cdot 10^7 \text{ m/s}}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,5 \text{ m}} = 672 \text{ mT.} \quad (8)$$

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
1999
Indirizzo Scientifico-Tecnologico Progetto Brocca

Trascrizione del testo e redazione delle soluzioni di Paolo Cavallo.

La prova

Il candidato svolga una breve relazione su uno solo dei seguenti temi, a sua scelta.

Tema 1

Si vuole determinare il rapporto e/m , tra carica e massa di un elettrone, utilizzando un tubo contenente neon a bassa pressione al cui interno gli elettroni sono emessi per effetto termoelettronico (conosciuto anche come effetto termoionico).

Essi hanno una velocità iniziale trascurabile e sono accelerati tra due elettrodi da una differenza di potenziale $\Delta V = 0,78 \text{ kV}$ fino a raggiungere la velocità v . Gli atomi di neon ne rendono visibile la traiettoria interagendo al loro passaggio.

Una volta raggiunta la velocità v , gli elettroni entrano in una zona che è sede di un campo magnetico con $B = 4,3 \cdot 10^{-4} \text{ T}$ e con un angolo α tra i vettori $\vec{B}$ e $\vec{v}$.

Il candidato:

1. descriva e spieghi l'effetto termoelettronico;
2. spieghi perché gli atomi di neon nel tubo rendono visibile la traiettoria degli elettroni;
3. disegni e commenti la possibile traiettoria di un elettrone tra due elettrodi (prima che risenta del campo magnetico) e poi all'interno del campo magnetico per $\alpha = 90^\circ$ e per $\alpha < 90^\circ$;
4. ricavi e commenti la formula che permette di calcolare la velocità dell'elettrone in funzione della d.d.p. tra gli elettrodi in un tubo sotto vuoto; calcoli tale velocità ricordando che la carica e la massa dell'elettrone sono $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ e $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$;
5. ricavi e commenti la formula che permette di calcolare il raggio della traiettoria in funzione della velocità dell'elettrone e dell'induzione magnetica; calcoli il raggio di tale traiettoria sapendo che l'angolo tra i vettori $\vec{B}$ e $\vec{v}$ è $\alpha = 60^\circ$;

6. ricavi e commenti la formula che permette di calcolare il rapporto e/m in funzione dei valori misurabili ΔV , B e r .

Tema 2

Un condensatore è un sistema elettrico costruito in modo tale da avere una grande capacità. Più condensatori possono essere collegati fra loro per aumentare o diminuire la capacità complessiva disponibile.

Il candidato:

1. definisca la grandezza fisica “capacità elettrica” di un conduttore, la sua unità di misura nel sistema S.I. e i suoi sottomultipli;
2. calcoli il raggio di un’ipotetica sfera conduttrice che abbia la capacità di un farad e commenti il risultato; come dato di riferimento prenda il raggio medio della Terra di 6370 km;
3. descriva la struttura di un condensatore piano spiegando perché essa permette d’aumentare, per quanto possibile, la capacità elettrica del sistema;
4. ricavi e commenti la formula per calcolare la capacità elettrica di un condensatore piano;
5. descriva almeno un’utilizzazione del condensatore in ambito scientifico o tecnologico;
6. disegni i simboli grafici di tre condensatori da $100\ \mu\text{F}$ collegati in modo da ottenere le capacità complessive di $150\ \mu\text{F}$ e di $300\ \mu\text{F}$.

Il candidato risolva, infine, il seguente problema.

Un sistema di condensatori avente la capacità complessiva di $1\ \text{mF}$, a cui è applicata la d.d.p. di $10\ \text{kV}$, è fatto scaricare su un resistore con $R = 100\ \Omega$ immerso in un litro d’acqua distillata alla temperatura di $20\ ^\circ\text{C}$ e contenuta in un recipiente isolato termicamente.

Il candidato calcoli la temperatura finale dell’acqua dopo che il sistema di condensatori si è completamente scaricato e spieghi che cosa succederebbe se si fosse raddoppiato il valore della resistenza.

La soluzione

Tema 1

1.

L'espressione *effetto termoelettronico* indica il fenomeno consistente nell'emissione di elettroni da parte di un catodo portato a una temperatura sensibilmente superiore alla temperatura ambiente. Consideriamo un tubo a vuoto con due elettrodi connessi ai poli di una batteria in serie con un amperometro. In condizioni normali, l'amperometro non indica il passaggio di alcuna corrente, o al più di una debole corrente di scarica dovuta al gas residuo nel tubo. Se però il catodo viene riscaldato, ad esempio facendovi passare la corrente di un circuito secondario, si osserva il passaggio di una corrente tanto più intensa quanto più è elevata la temperatura del catodo.

L'effetto termoelettronico è facilmente spiegabile in termini classici ricordando che, aumentando la temperatura, aumenta l'energia cinetica media delle particelle che costituiscono il metallo e in particolare degli elettroni. Aumenta di conseguenza la percentuale di elettroni veloci, con un'energia almeno sufficiente a vincere l'attrazione elettrostatica da parte del reticolo cristallino e ad uscire dal catodo. Una volta all'esterno del metallo, la differenza di potenziale applicata dalla batteria accelera gli elettroni verso l'anodo, in modo che essi vanno a costituire una corrente misurabile.

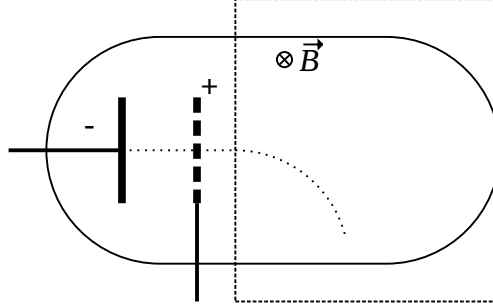
2.

Se nel tubo discusso in precedenza è presente del neon a bassa pressione, gli elettroni accelerati verso l'anodo urteranno gli atomi di neon al loro passaggio. Nell'urto fra un elettrone e un atomo di neon, l'energia dell'elettrone libero sarà ceduta in parte a uno degli elettroni più esterni dell'atomo di neon, il quale si porterà allora su un livello energetico più alto. Dopo un brevissimo intervallo di tempo, l'elettrone tornerà al livello energetico più basso, emettendo un fotone di energia hf pari alla differenza di energia fra i due livelli.

In altri termini, gli atomi di neon emetteranno luce al passaggio degli elettroni, permettendo così di individuarne la traiettoria (nei limiti in cui il concetto di traiettoria è applicabile a un elettrone).

3.

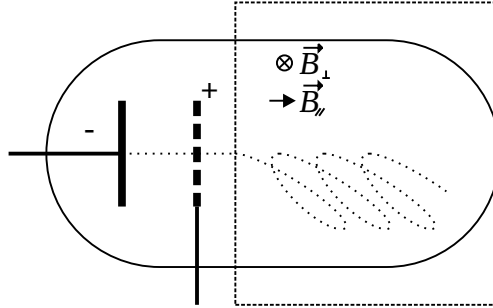
La traiettoria di un elettrone nel primo caso ($\alpha = 90^\circ$) è immediata. L'elettrone ha una traiettoria rettilinea fra i due elettrodi (a rigore, l'elettrone cade anche nel campo gravitazionale terrestre; ma il moto è così rapido che la traiettoria non fa in tempo a mostrare deviazioni dal percorso rettilineo). Quando l'elettrone entra nel rettangolo tratteggiato che è sede del campo $\vec{B}$ (perpendicolare al piano del foglio), la forza di Lorentz fa sì che assuma una traiettoria circolare. Nel disegno che segue abbiamo tracciato la traiettoria dell'elettrone (o parte di essa) con una linea punteggiata.



Nel secondo caso ($\alpha < 90^\circ$) la situazione è più complessa, e la analizzeremo esclusivamente nel caso non relativistico $v \ll c$.

Ipotizziamo che il campo $\vec{B}$ abbia due componenti, una $\vec{B}_\perp$ perpendicolare al piano del foglio, l'altra $\vec{B}_\parallel$ parallela alla direzione iniziale dell'elettrone. Scomponiamo il moto dell'elettrone in due moti indipendenti e sovrapposti, il primo con velocità $\vec{v}_\perp$ perpendicolare a $\vec{B}$ e il secondo con velocità $\vec{v}_\parallel$ parallela ad esso. Mentre il secondo moto si manterrà invariato sotto l'azione del campo magnetico, il primo si trasformerà in un moto circolare uniforme. La sovrapposizione dei due moti darà luogo pertanto a una traiettoria elicoidale con asse parallelo a $\vec{v}_\parallel$ e quindi a $\vec{B}$.

Il disegno non è semplice da realizzare. L'elica, nelle nostre ipotesi, ci appare di scorcio, poiché $\vec{B}$ è inclinato rispetto al piano del disegno.



Non possiamo fare a meno di chiederci se è davvero questa la situazione che l'estensore della prova aveva in mente di sottoporre ai candidati. La ragione di dubitare ci è data dal punto 5. del tema, dove si parla di “raggio della traiettoria”. Che cosa si deve intendere per “raggio” di una traiettoria elicoidale? Il raggio del cilindro intorno al quale l'elica risulta avvolta? La risposta non è affatto ovvia. Per di più, il raggio inteso in questa accezione è proprio ciò che occorre misurare per determinare il rapporto e/m , come nel punto 6. si richiede esplicitamente. Ora, se si vuole misurare tale raggio, è certamente preferibile avere a che fare con una traiettoria piana piuttosto che con una traiettoria elicoidale: non si vede perché lo sperimentatore dovrebbe porsi in una situazione così scomoda, quando l'introduzione di un campo $\vec{B}$ perpendicolare alla velocità iniziale degli elettroni consente misure molto più agevoli.

4.

La presenza di una differenza di potenziale ΔV accelera gli elettroni che emergono dal catodo. L'energia potenziale elettrostatica del sistema diminuisce, mentre aumenta l'energia cinetica degli elettroni:

$$-\Delta E_p = \Delta K$$

che per un singolo elettrone si scrive:

$$e\Delta V = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1)$$

dove si è trascurata la velocità iniziale v_0 degli elettroni.

La velocità finale v degli elettroni risulta

$$v = \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,78 \cdot 10^3 \text{ V}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} = 1,6 \cdot 10^7 \text{ m/s}. \quad (2)$$

Poiché $v \ll c$, la nostra trattazione non relativistica è giustificata.

5.

Rimandiamo il lettore ai nostri commenti alla fine della trattazione del punto 3., a proposito dell'espressione "raggio della traiettoria".

Supponendo che per raggio si intenda quello del cilindro intorno al quale è avvolta l'elica, ricordiamo che esso non è altro che il raggio del moto circolare uniforme relativo alla componente $\vec{v}_\perp$ della velocità. Per questo moto, la forza di Lorentz svolge il ruolo di forza centripeta. Possiamo scrivere:

$$e v_\perp B = m \frac{v_\perp^2}{r}. \quad (3)$$

Ricavando r e osservando che $v_\perp = v \sin(\alpha)$ otteniamo:

$$r = \frac{m v \sin(\alpha)}{e B} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1,6 \cdot 10^7 \text{ m/s} \cdot \sin(60^\circ)}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 4,3 \cdot 10^{-4} \text{ T}} = 0,18 \text{ m}. \quad (4)$$

6.

Facciamo notare che se si vuole un'espressione che dipenda dalle grandezze sperimentalmente misurabili, nell'elenco di queste occorre comprendere l'angolo α . Di nuovo, il legame fra il tema e la cornice sperimentale proposta non ci sembra del tutto risolto.

Sostituendo nella (4) l'espressione della velocità data dalla (2) e elevando al quadrato otteniamo

$$r^2 = \frac{2 m \Delta V [\sin(\alpha)]^2}{e B^2}$$

e risolvendo per il rapporto e/m richiesto abbiamo infine:

$$\frac{e}{m} = \frac{2 \Delta V [\sin(\alpha)]^2}{r^2 B^2} \quad (5)$$

Tema 2

1.

La *capacità elettrica* C di un conduttore carico isolato è definita come il rapporto fra la carica totale Q_T presente sul conduttore e il potenziale elettrico V al quale si trova il conduttore:

$$C = \frac{Q_T}{V}. \quad (6)$$

Di conseguenza le dimensioni fisiche della capacità sono quelle di una carica divisa per una tensione, ovvero di una carica al quadrato divisa per un'energia. L'unità di misura nel Sistema Internazionale è il *farad*, definito in modo che

$$1 \text{ F} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ V}} = \frac{1 \text{ A} \cdot 1 \text{ s}}{1 \text{ J}/(1 \text{ A} \cdot 1 \text{ s})} = \frac{(1 \text{ A})^2 \cdot (1 \text{ s})^2}{1 \text{ kg} \cdot (1 \text{ m})^2/(1 \text{ s})^2} = \frac{(1 \text{ A})^2 \cdot (1 \text{ s})^4}{1 \text{ kg} \cdot (1 \text{ m})^2}. \quad (7)$$

Com'è noto, e come si vedrà esplicitamente in seguito, il farad è un campione di capacità di dimensioni troppo elevate per essere di uso pratico. Per questo risultano importanti i suoi sottomultipli, definiti come previsto dal Sistema Internazionale:

$$\begin{aligned} 1 \text{ millifarad} &= 1 \text{ mF} = 10^{-3} \text{ F} \\ 1 \text{ microfarad} &= 1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F} \\ 1 \text{ nanofarad} &= 1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F} \\ 1 \text{ picofarad} &= 1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}. \end{aligned}$$

Il concetto di capacità *elettrica* di un sistema è stato costruito storicamente in analogia con il concetto di capacità di un *recipiente* e di capacità *termica*. In tutti questi casi, infatti, entra in gioco la relazione fra “qualcosa” che viene fornito al sistema e il *livello* a cui si porta il sistema in conseguenza di ciò. Nel caso di un recipiente, parliamo di un fluido e del livello da esso raggiunto nel recipiente. Nel caso della capacità termica, parliamo dell'energia termica fornita al sistema e del livello termico, cioè della *temperatura*, da esso raggiunta. Nel caso della capacità elettrica, si tratta della carica elettrica e del livello elettrico, cioè del *potenziale*.

Poiché i primi modelli fisici tanto dell'energia termica che della quantità di carica sono stati quelli di un particolare *fluido*, è facile osservare che l'analogia sottesa al termine di “capacità” non è affatto casuale dal punto di vista storico.

2.

La capacità elettrica di una sfera conduttrice carica isolata e in equilibrio, di raggio R , può essere determinata calcolando il potenziale V a cui essa si trova.

La sfera è un conduttore all'equilibrio; di conseguenza, il campo elettrico al suo interno dev'essere nullo ovunque, altrimenti i portatori di carica si metterebbero in moto, contro l'ipotesi dell'equilibrio. Sulla superficie della sfera, per lo stesso motivo, il campo elettrico dev'essere normale alla superficie. Così, se immaginassimo di spostare una carica infinitesima da un punto all'altro della sfera, il campo elettrico non eseguirebbe su di essa alcun lavoro. Poiché la differenza di potenziale fra due punti è data appunto dal lavoro elettrico compiuto

spostando da uno all'altro una carica di prova, concludiamo che il potenziale deve essere lo stesso in tutti i punti della sfera.

Per il teorema di Gauss, il flusso del campo elettrico su una qualsiasi superficie chiusa interna alla sfera deve risultare proporzionale alla carica elettrica racchiusa dalla superficie. Ma, per quanto detto sopra, tale flusso risulta identicamente nullo per qualunque superficie. Di conseguenza, all'interno della sfera non troveremo alcuna carica elettrica non equilibrata. In altri termini, la carica elettrica depositata sulla sfera deve distribuirsi sulla superficie di questa.

Determiniamo il potenziale elettrico al centro della sfera. Ogni carica infinitesima dq posta sulla superficie della sfera può essere trattata come una carica puntiforme, che genera a distanza R , cioè nel centro della sfera, un potenziale infinitesimo

$$dV(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R}.$$

Sommando tutti questi contributi, e ricordando che R ha lo stesso valore per ciascuno di essi, otteniamo il potenziale

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_T}{R} \quad (8)$$

che coincide, in maniera niente affatto casuale, con il potenziale che la carica Q_T genererebbe sulla superficie della sfera se fosse concentrata nel suo centro.

Come abbiamo già detto, questo valore del potenziale è lo stesso in tutti i punti della sfera e può quindi essere considerato come *il* potenziale della sfera. Per la definizione (6) otteniamo la seguente espressione della capacità di una sfera:

$$C = \frac{Q_T}{V} = Q_T \cdot 4\pi\epsilon_0 \frac{R}{Q_T} = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (9)$$

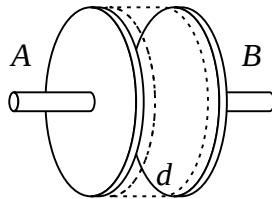
Se $C = 1 \text{ F}$ abbiamo:

$$R = \frac{C}{4\pi\epsilon_0} = \frac{1 \text{ F}}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}} = 8,988 \cdot 10^9 \text{ m}.$$

Come si vede, si tratta di una sfera il cui raggio è di tre ordini di grandezza maggiore di quello della Terra.

3.

Un condensatore piano è costituito da due superfici conduttrici piane (dette *armature*) di area S e affacciate a una distanza x . Lo spazio fra le armature A e B è per lo più riempito da un dielettrico d .

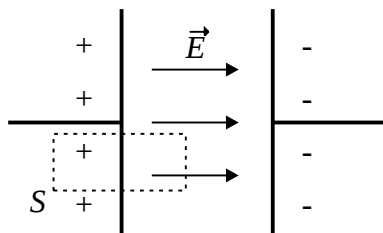


Se depositiamo una carica positiva $+Q$ sull'armatura A , l'altra armatura, se collegata a terra, si carica per induzione assumendo una carica negativa $-Q$. I due conduttori non sono evidentemente isolati, per cui il potenziale a cui si trova ciascuno di essi dipende dalla presenza dell'altro conduttore. Piuttosto che parlare di potenziale di ciascuna delle armature, è conveniente parlare della *differenza di potenziale* ΔV fra di esse. La capacità di un condensatore è infatti definita come il rapporto fra la carica presente su un'armatura e la *differenza di potenziale* fra le armature.

Il testo chiede di spiegare perché un condensatore piano “permette d'aumentare, per quanto possibile, la capacità elettrica del sistema”. Non è del tutto chiaro che cosa l'estensore abbia in mente. Ma, in ogni caso, ci sembra più opportuno discutere questo punto contestualmente al prossimo e a partire dall'espressione analitica della capacità di un condensatore piano.

4.

Per determinare il campo elettrico generato da *una* armatura, applichiamo il teorema di Gauss alla superficie cilindrica S (rappresentata di taglio nel disegno qui sotto).



Nel seguito, supporremo che la distanza fra le armature sia molto minore delle dimensioni delle armature stesse. Ciò comporta che, per i punti lontani dal bordo, gli effetti di bordo siano molto limitati, e il campo appaia come quello di una distribuzione piana di carica praticamente infinita. Per motivi di simmetria, il campo deve avere due proprietà importanti:

1. deve essere perpendicolare alla superficie dell'armatura;
2. deve avere la stessa intensità su entrambe le facce dell'armatura, a distanze uguali da essa, e deve essere rivolto in versi opposti.

Il flusso di tale campo attraverso il cilindro S è fatto di due contributi: il flusso attraverso la superficie laterale e quello attraverso le due superfici di base. Per il punto 1. indicato sopra, il primo contributo è nullo, perché il campo è dappertutto tangente alla superficie laterale del cilindro. Per il punto 2., il flusso totale è pari al doppio del flusso attraverso una delle due basi del cilindro. Tale flusso vale:

$$\Phi_S(\vec{E}) = 2 \Phi_{base}(\vec{E}) = 2 \vec{E} \cdot \vec{A} = 2 E \cdot A \quad (10)$$

dove A è l'area di base di S , ed è anche l'area intercettata da S sull'armatura. Per il teorema di Gauss, il flusso totale attraverso S dev'essere uguale alla carica

totale racchiusa da S divisa per la costante dielettrica del mezzo:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_T}{\epsilon} = \frac{\sigma A}{\epsilon} \quad (11)$$

dove σ è la densità superficiale di carica sull'armatura.

Confrontando la (10) e la (11) otteniamo l'espressione del campo elettrico di un'armatura:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon}. \quad (12)$$

Si tratta di un campo *indipendente dalla distanza dalle armature*. Nei limiti delle ipotesi da noi poste, e dunque per distanze dall'armatura piccole rispetto all'armatura stessa, e per punti non troppo vicini al bordo, il campo generato da un'armatura ha lo stesso valore in tutti i punti.

Sovrapponiamo ora i campi generati dalle due armature. All'esterno del condensatore i campi hanno verso opposto (ricordiamo che il campo dell'armatura positiva è *uscente* da essa, mentre il campo dell'armatura negativa è *entrante* in essa) ma uguale direzione e intensità: la loro somma è pertanto uguale a zero. All'interno del condensatore, invece, i versi dei due campi sono concordi, per cui i campi si sommano. Il campo totale è perciò confinato all'interno del condensatore e ha ivi intensità σ/ϵ uniforme.

Per determinare la differenza di potenziale fra le armature, ricordiamo la definizione:

$$\Delta V_{AB} = - \int_A^B \vec{E} \circ d\vec{s} \quad (13)$$

che in questo caso, andando dall'armatura negativa a quella positiva (ricordiamo che x rappresenta la distanza fra le armature), diventa:

$$\Delta V = -(\vec{E} \circ \Delta \vec{s}) = -(-E x) = E x = \frac{\sigma x}{\epsilon} = \frac{Q x}{\epsilon S}. \quad (14)$$

La capacità del condensatore risulta pertanto:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\epsilon S}{x}. \quad (15)$$

L'espressione (15) ci permette di capire quali fattori influenzano la capacità di un condensatore. In primo luogo, la presenza di un dielettrico fra le armature aumenta il valore della capacità di un fattore pari alla costante dielettrica relativa ϵ_r del mezzo interposto. In effetti, il dielettrico fra le armature cariche risulta polarizzato, con un campo elettrico dovuto alla polarizzazione rivolto in verso *opposto* a quello delle armature. Ciò va a diminuire il campo elettrico totale e quindi la differenza di potenziale fra le armature, permettendo di immagazzinare su di esse più carica elettrica a parità di tensione.

In secondo luogo, la capacità risulta tanto maggiore quanto maggiore è il rapporto S/x . Per avere una grande capacità, le armature devono essere le più estese possibile e la distanza che le separa dev'essere la minima possibile. Ciò viene realizzato, in pratica, con fogli conduttori molto sottili, separati da strati di dielettrico spessi poche molecole, e avvolti strettamente su se stessi.

5.

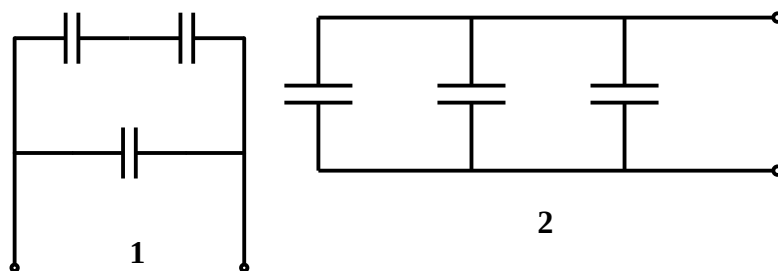
Molte applicazioni dei condensatori sono direttamente legate alla loro natura di *serbatoi di carica elettrica*. In alcune calcolatrici programmabili, ad esempio, un condensatore svolge il ruolo di “generatore di tensione di emergenza”. Queste calcolatrici non hanno, ovviamente, memorie di massa simili a un disco fisso, così che i dati e i programmi dell’utente devono essere conservati nella RAM sotto forma di stati di tensione. La tensione necessaria a questo scopo è fornita naturalmente dalle batterie che fanno funzionare la calcolatrice. Quando queste batterie sono esaurite e devono essere sostituite, però, occorre un “dispositivo tampone” che mantenga una tensione sufficiente per il tempo necessario. Questo dispositivo può appunto essere costituito da un condensatore di grande capacità, in grado di mantenere una corretta differenza di potenziale per parecchi minuti a calcolatrice spenta.

6.

È facile dimostrare che la connessione di più condensatori gode delle seguenti proprietà:

1. la connessione di più condensatori in parallelo è equivalente a un unico condensatore, la cui capacità sia uguale alla somma delle capacità dei condensatori;
2. la connessione di più condensatori in serie è equivalente a un unico condensatore, l’inverso della cui capacità sia uguale alla somma degli inversi delle capacità dei condensatori.

In base a ciò, tracciamo gli schemi seguenti, dove tutti i condensatori hanno una capacità di $100\ \mu\text{F}$.



Questi schemi costituiscono la risposta al quesito proposto.

1. Nello schema **1** i due condensatori collegati *in serie* hanno una capacità equivalente di $50\ \mu\text{F}$, così che la loro connessione *in parallelo* con il terzo condensatore ha una capacità equivalente di $150\ \mu\text{F}$.
2. Nello schema **2** i tre condensatori collegati *in parallelo* hanno una capacità equivalente di $300\ \mu\text{F}$.

Problema

Per risolvere il problema proposto, determiniamo l'espressione che fornisce l'energia necessaria a caricare un condensatore fino a una tensione ΔV assegnata. Se sul condensatore è presente una carica q e quindi una differenza di potenziale $\Delta V(q)$, per portare sull'armatura positiva un'ulteriore carica infinitesima dq occorre spendere un'energia $dq \Delta V$. L'energia totale necessaria a caricare il condensatore è pertanto:

$$E = \int_0^Q \Delta V dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C \Delta V^2. \quad (16)$$

Nel nostro caso tale energia vale

$$E = \frac{1}{2} \cdot 1 \text{ mF} \cdot (10 \text{ kV})^2 = 50 \text{ kJ}. \quad (17)$$

Quando il condensatore si scarica sul resistore, l'energia immagazzinata viene spesa per fare passare la corrente in quest'ultimo e viene quindi convertita in energia termica del resistore e dell'acqua per effetto Joule. Trascurando (come è certamente legittimo) la capacità termica del resistore, l'energia termica trasferita all'acqua può essere calcolata con l'espressione:

$$E_{term} = C_{term} \Delta T = c m \Delta T. \quad (18)$$

Per il principio di conservazione dell'energia la (17) e la (18) sono uguali. Ricordando che per l'acqua $c = 4186 \text{ J/(K kg)}$ e $d = 1000 \text{ kg/m}^3$ e risolvendo per ΔT otteniamo:

$$\Delta T = \frac{E_{term}}{c m} = \frac{50 \text{ kJ}}{4186 \text{ J/(K} \cdot \text{kg)} \cdot 1 \text{ kg}} = 12 \text{ K} = 12^\circ \text{C}. \quad (19)$$

La temperatura finale dell'acqua risulta di 32°C . Facciamo notare che questo risultato non dipende affatto dal valore della resistenza. Se R raddoppiasse, la costante di tempo $\tau = RC$ del circuito di scarica raddoppierebbe anch'essa e la scarica si svolgerebbe più lentamente, ma la temperatura finale dell'acqua avrebbe lo stesso valore.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2000

Indirizzo Scientifico Progetto Brocca

Trascrizione del testo e redazione delle soluzioni di Paolo Cavallo.

La prova

Il candidato svolga una breve relazione su uno solo dei seguenti temi, a sua scelta.

Tema 1

Nella prima metà del secolo XX, dopo la scoperta che la radiazione elettromagnetica ha un comportamento duale, ondulatorio e corpuscolare, fu formulata l'ipotesi che anche la materia, considerata composta da particelle, potesse presentare caratteristiche ondulatorie.

Il candidato:

- spieghi il significato dell'espressione "*la radiazione ha un comportamento duale, ondulatorio e corpuscolare*" e descriva un esperimento che ha messo in evidenza il comportamento corpuscolare;
- spieghi il significato dell'espressione "*fu formulata l'ipotesi che la materia, considerata composta da particelle, potesse presentare caratteristiche ondulatorie*" e descriva un esperimento che ha confermato la realtà di questa ipotesi teorica;
- calcoli quanti fotoni emette in un minuto una stazione radio che trasmette musica alla frequenza di 99 MHz con una potenza di uscita di 20 kW;
- calcoli la lunghezza d'onda associata ad un elettrone che, con velocità iniziale trascurabile, è stato accelerato tra due elettrodi da una differenza di potenziale di 200 V;
- calcoli, in eV, la minima energia cinetica che può avere un elettrone costretto a muoversi in uno spazio unidimensionale lungo 0,1 nm:
 - velocità della luce: $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s;
 - costante di Planck: $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s;
 - massa dell'elettrone: $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg;
 - carica dell'elettrone: $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C.

Tema 2

Sono disponibili una pila di forza elettromotrice $f. e. m. = 4,5 \text{ V}$ e due lampadine, A e B , costruite per essere utilizzate con una differenza di potenziale $\Delta V = 4,5 \text{ V}$ e aventi, rispettivamente, le potenze $P_A = 3 \text{ W}$ e $P_B = 5 \text{ W}$.

La pila eroga una corrente di intensità $I = 6 \text{ A}$ se è posta in condizione di cortocircuito per un breve istante.

Il candidato:

- spieghi i concetti di forza elettromotrice di una pila e di differenza di potenziale disponibile ai suoi morsetti, proponendo anche la relazione matematica tra le due grandezze;
- descriva una procedura di laboratorio per misurare ognuna delle due grandezze fisiche;
- tratti il concetto di potenza associato ad una corrente elettrica e ricavi l'espressione della potenza dissipata in una resistenza;
- calcoli la resistenza interna della pila in condizioni di cortocircuito, trascurando la resistenza del filo di collegamento;
- calcoli la potenza dissipata sulle due lampadine quando vengono collegate, separatamente, alla pila;
- calcoli, in percentuale, il rendimento delle due lampadine in rapporto alla loro reale capacità di funzionamento e commenti il risultato indicando quale lampadina ha la luminosità più vicina al valore massimo possibile, in base alle sue caratteristiche, e spiegando il perché.

La soluzione

Tema 1

Carattere duale della radiazione

Forse chiedere allo studente di spiegare il significato di una frase del testo proposto è una scelta che risente un po' troppo dell'impostazione di tanti Temi di Lingua Italiana. Si tratta di una frase che delinea già una certa formulazione e interpretazione della teoria quantistica e delle sue origini storiche. Forse sarebbe stato meglio scegliere un'impostazione che prendesse le mosse dal resoconto di un esperimento, o comunque da una formulazione esplicitamente legata a uno dei protagonisti di quello sviluppo storico, magari con una citazione originale. Una prova di Fisica non dovrebbe esigere dal candidato la capacità di riportare fedelmente una qualche "interpretazione autentica", quasi che si trattasse della parafrasi in prosa di un verso di Dante.

La frase "la radiazione ha un comportamento duale, ondulatorio e corpuscolare" sarà interpretata in maniera differente nel contesto di differenti interpretazioni della teoria quantistica della luce nel suo complesso. Ci limitiamo ad accennare a due interpretazioni particolarmente autorevoli.

- Nell'articolo di Albert Einstein del 1905, "Un punto di vista euristico relativo alla generazione e alla trasformazione della luce" (si tratta dell'articolo che contiene la celebre spiegazione dell'effetto fotoelettrico), la "dualità" del comportamento della luce è vista esplicitamente come legata soltanto a differenti livelli di analisi dei fenomeni luminosi. Einstein scrive:

le osservazioni ottiche si riferiscono a valori medi temporali, e non già a valori istantanei, e nonostante gli esperimenti abbiano pienamente confermato la teoria della diffrazione, della riflessione, della rifrazione, della dispersione e così via, è concepibile che una teoria della luce basata su funzioni spaziali continue porti a contraddizioni con l'esperienza se la si applica ai fenomeni della generazione e della trasformazione della luce [...]. Secondo l'ipotesi che sarà qui considerata, quando un raggio luminoso si propaga, l'energia non si distribuisce in modo continuo in uno spazio via via più grande; essa consiste invece in un numero finito di quanti di energia, localizzati in punti dello spazio, i quali si muovono senza dividersi e possono essere assorbiti e generati solo nella loro interezza.

Come si vede chiaramente, il comportamento della luce non è per Einstein "duale" in sé. Piuttosto, esso appare conforme al modello ondulatorio quando si esaminano medie temporali e spaziali, come nelle comuni esperienze di ottica, ivi compresa l'esperienza della doppia fenditura di Young. Ma se si considera la luce a livello microscopico, questa apparirà inequivocabilmente costituita da corpuscoli localizzati nello spazio. Va ricordato che lo scopo dichiarato da Einstein all'inizio del suo lavoro è appunto quello di risolvere la "profonda differenza formale" fra la descrizione ondulatoria e continua della luce e la descrizione corpuscolare dei corpi materiali.

- Secondo l'impostazione di Bohr, basata sul principio di complementarità, la necessità di descrivere i risultati degli esperimenti nel linguaggio della

fisica classica, che è anche quello dell'esperienza quotidiana, costringe a usare, di volta in volta, i termini del modello corpuscolare o del modello ondulatorio. Lo sperimentatore deve decidere, fin dall'inizio, su quale modello basarsi e deve rinunciare a osservare quei comportamenti che sono descritti in maniera soddisfacente soltanto nel modello complementare. Ogni domanda sul *reale* comportamento della luce è per Bohr priva di senso, perché nessun esperimento potrà rispondere ad essa, così come nessun esperimento potrà mai mettere in evidenza *entrambi* gli aspetti, quello ondulatorio e quello corpuscolare, *nello stesso tempo*.

Ci scusiamo per questa lunga discussione. Speriamo di aver sottolineato adeguatamente le difficoltà anche insidiose implicite nella richiesta del tema. Naturalmente, ci sentiamo di affermare che la risposta del candidato andava valutata in base al contesto complessivo in cui egli aveva appreso le basi della teoria quantistica, senza discriminare fra differenti interpretazioni, ciascuna a suo modo legittima.

Il terreno su cui ci muoviamo è un po' più saldo se affrontiamo la seconda parte della prima richiesta, la descrizione di un esperimento "che ha messo in evidenza il comportamento corpuscolare" della luce. Certo, anche qui occorre chiedersi cosa si debba intendere per "mettere in evidenza". La meccanica quantistica ci mette continuamente di fronte all'impossibilità di separare completamente teoria ed esperimento. Nessun esperimento può mettere in evidenza l'aspetto corpuscolare della luce, se non nel quadro di una teoria dei fenomeni di emissione e assorbimento della luce: non si possono vedere i fotoni!

Un buon esempio di quanto intendiamo dire è proprio l'effetto fotoelettrico e la spiegazione che ne propone Einstein. L'osservazione dell'effetto fotoelettrico da parte di Lenard nel 1902, o meglio, la determinazione che in tale fenomeno l'energia dei fotoelettroni è indipendente dall'intensità della radiazione incidente, non è di per sé una dimostrazione dell'aspetto corpuscolare della luce. Altrimenti, non ci sarebbe stata ragione di assegnare ad Einstein il premio Nobel per l'articolo già citato. L'effetto fotoelettrico diventa una manifestazione dell'aspetto corpuscolare *alla luce* della spiegazione che ne ha offerto Einstein. Avendo sottolineato questo punto importante, riportiamo nel seguito la discussione dell'effetto fotoelettrico già svolta in relazione alla prova d'Esame per l'anno 1997.

L'effetto fotoelettrico può essere messo in evidenza utilizzando un opportuno tubo a vuoto con due elettrodi connessi a una pila che mantiene fra essi una differenza di potenziale assegnata. Poiché i due elettrodi sono isolati, nel circuito così costituito non passa alcuna corrente. Ma se il catodo (l'elettrodo connesso al polo negativo della pila) è costituito da una piastrina metallica, è possibile far passare una corrente nel circuito illuminando il catodo con una sorgente di radiazione elettromagnetica, visibile o ultravioletta. Finché la lunghezza d'onda della radiazione impiegata è *superiore* a un certo valore λ_0 , detto lunghezza d'onda di soglia, nel circuito non si osserva alcuna corrente, qualunque sia l'intensità della sorgente impiegata. La corrente passa soltanto se la radiazione ha una lunghezza d'onda uguale o inferiore a λ_0 .

Dal punto di vista dell'elettromagnetismo classico, questo è effetto è sconcertante. Se nel circuito si stabilisce una corrente, possiamo ipotizzare che il catodo illuminato emetta elettroni, in maniera simile a quello che avviene nell'effetto termoionico. L'energia necessaria ad abbandonare il catodo, indicata

come *funzione lavoro* W , deve evidentemente essere fornita agli elettroni dalla radiazione incidente. Ma secondo l'elettromagnetismo classico l'energia della radiazione non dipende dalla lunghezza d'onda. In altri termini, con una sorgente di radiazione abbastanza intensa, si dovrebbe osservare un passaggio di corrente per qualunque valore della lunghezza d'onda. L'esistenza di un effetto di soglia resta inspiegabile.

L'effetto fotoelettrico fu spiegato da Einstein nel 1905 in base all'ipotesi dei quanti di luce, già avanzata in altra forma da Planck cinque anni prima a proposito del problema del corpo nero. Planck aveva proposto di *quantizzare* gli scambi di energia fra radiazione e materia, ipotizzando che essi potessero avvenire soltanto per multipli di un'energia minima, data dal prodotto della costante h (oggi nota come *costante di Planck*) per la frequenza f della radiazione. Einstein estende l'ipotesi di Planck, proponendo di quantizzare la radiazione stessa e di considerarla come composta di *quanti di luce* aventi energia hf . Indicheremo questi quanti con il nome di *fotoni*, assegnato loro soltanto in seguito. Ogni fotone ha quindi un'energia:

$$E_f = hf = \frac{hc}{\lambda}. \quad (1)$$

Einstein propose il seguente modello. Quando un fotone colpisce un elettrone nel metallo che costituisce il catodo, gli cede la propria energia hf . Se la frequenza del fotone è troppo bassa (ovvero, se la lunghezza d'onda è troppo alta), l'energia ceduta all'elettrone è inferiore a W e l'elettrone resta confinato nel metallo, dove negli urti con il reticolo cristallino perde immediatamente l'energia acquistata. Se invece f è uguale o superiore a una frequenza di soglia f_0 (ovvero, se λ è uguale o inferiore a $\lambda_0 = c/f_0$) l'elettrone acquista un'energia almeno sufficiente a lasciare il metallo e a muoversi nel campo elettrico esterno stabilito dalla pila. La condizione che determina λ_0 è allora semplicemente:

$$W = \frac{hc}{\lambda_0}. \quad (2)$$

Caratteristiche ondulatorie della materia

Anche questo punto non è esente da difficoltà. Non ripetiamo ciò che abbiamo già detto a proposito della scelta di invitare lo studente a spiegare il significato di una frase del testo. Sottolineiamo invece come l'espressione “un esperimento che ha confermato la realtà di questa ipotesi teorica” sia problematica. Non era meglio parlare di “fondatezza”, piuttosto che di realtà? Forse l'estensore desiderava enfatizzare come l'ipotesi in discussione non possa più essere considerata un semplice espediente formale, ma faccia emergere uno specifico elemento di realtà. Ma, ancora una volta, ciò significa privilegiare *una* interpretazione della teoria quantistica, e dare per scontato che tutti i candidati siano stati esposti ad essa e soltanto ad essa.

La frase citata si riferisce evidentemente all'ipotesi di de Broglie, avanzata da questi nel 1923 e poi nella tesi di dottorato del 1924. De Broglie propose di associare a ogni particella di massa a riposo m un “fenomeno periodico interno”. Tale fenomeno, in un sistema di riferimento in cui la particella avesse avuto velocità v e quantità di moto p , avrebbe dato origine a un'onda di lunghezza

d'onda

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (3)$$

dove h è la costante di Planck.

Nella formulazione di de Broglie non sono chiarite né la natura del “fenomeno periodico interno” né quella dell'onda associata alla particella. L'ipotesi di tale onda restava allora del tutto arbitraria. Ma immaginiamo che la particella in questione sia un elettrone in moto su un'orbita all'interno di un atomo di idrogeno. Propagandosi lungo l'orbita, l'onda interferirà con se stessa; possiamo assumere quindi che le sole orbite consentite siano quelle che danno luogo a un'interferenza costruttiva dell'onda con se stessa e quindi allo stabilirsi di un'onda *stazionaria*. La condizione perché questo avvenga è che l'orbita dell'elettrone contenga un numero intero di lunghezze d'onda. Per orbite circolari di raggio r

$$2\pi r = n\lambda \quad (4)$$

con n intero qualunque. Facendo uso della (3) otteniamo

$$L = pr = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar. \quad (5)$$

La (5) esprime la condizione di quantizzazione di Bohr per orbite circolari, ipotizzata da Bohr nell'articolo del 1913 per spiegare la stabilità della materia e il fenomeno degli spettri a righe. L'ipotesi di de Broglie rappresenta perciò un primo elemento di giustificazione di quella ipotesi e un importante indizio per il programma di ricerca che sarebbe stato portato al successo da Schrödinger nel 1926.

Se ad un elettrone in movimento è necessario associare un'onda, deve essere possibile osservare nel caso degli elettroni i fenomeni associati alla propagazione ondulatoria, in particolare il fenomeno dell'*interferenza*. Ciò avvenne effettivamente grazie a una serie di esperimenti realizzati fra il 1925 e il 1927 da alcuni ricercatori, in particolare da Davisson e Germer. Facendo incidere un fascio di elettroni su un cristallo, i piani di simmetria del cristallo si comportano come un reticolo di diffrazione. Ponendo a una certa distanza dal cristallo una lastra fotografica, su di essa si registra una figura di interferenza, formata da zone chiare alternate a zone scure, del tutto analoga a quella che si ottiene impiegando, invece degli elettroni, una radiazione elettromagnetica costituita da raggi X.

Supponiamo di impiegare elettroni emessi da un tubo catodico e accelerati da una differenza di potenziale dell'ordine di 10^3 V. L'energia cinetica impressa agli elettroni è

$$K = e\Delta V = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^3 \text{ V} \simeq 10^{-16} \text{ J}.$$

La velocità degli elettroni, calcolata come è lecito in maniera non relativistica, risulta

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-16} \text{ J}}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} \simeq 10^7 \text{ m/s}.$$

La lunghezza d'onda associata a questi elettroni secondo la (3) è

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 10^7 \text{ m/s}} \simeq 10^{-10} \text{ m}$$

un ordine di grandezza confrontabile con quello tipico dei raggi X.

I fotoni emessi da una stazione radio

Secondo l'interpretazione proposta da Einstein, e incorporata nelle successive versioni della teoria quantistica, una radiazione di frequenza f dev'essere considerata composta da *fotoni* (il termine non è di Einstein) di energia hf . Nel caso qui discusso:

$$E_{\text{fotone}} = hf = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 99 \cdot 10^6 \text{ Hz} = 6,6 \cdot 10^{-26} \text{ J}. \quad (6)$$

In un minuto, la stazione irradia un'energia pari a

$$E_{\text{stazione}} = P \Delta t = 20 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot 60 \text{ s} = 1,2 \cdot 10^6 \text{ J}. \quad (7)$$

Otteniamo il numero dei fotoni emessi in un minuto dividendo la (7) per la (6):

$$N_{\text{fotoni}} = \frac{E_{\text{stazione}}}{E_{\text{fotone}}} = \frac{1,2 \cdot 10^6 \text{ J}}{6,6 \cdot 10^{-26} \text{ J}} = 1,8 \cdot 10^{31}. \quad (8)$$

La lunghezza d'onda di un elettrone

Abbiamo già svolto un calcolo analogo discutendo l'esperimento di Davisson e Germer. Se un elettrone attraversa una differenza di potenziale ΔV , la sua energia cinetica aumenta di una quantità pari all'energia potenziale elettrica persa dal sistema:

$$\Delta K = -\Delta U = -e \Delta V = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 200 \text{ V} = 3,2 \cdot 10^{-17} \text{ J}. \quad (9)$$

Nell'ipotesi che la velocità iniziale dell'elettrone sia trascurabile rispetto alla sua velocità finale, quest'ultima può essere calcolata come:

$$v_f = \sqrt{\frac{2K_f}{m}} = \sqrt{\frac{2\Delta K_f}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,2 \cdot 10^{-17} \text{ J}}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} = 8,4 \cdot 10^6 \text{ m/s}. \quad (10)$$

Il valore della velocità finale è compatibile con la trattazione non relativistica da noi adottata, in quanto $v_f \ll c$. Dalla (3) si ricava immediatamente

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 8,4 \cdot 10^6 \text{ m/s}} = 8,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}. \quad (11)$$

Energia cinetica minima di un elettrone

Se l'elettrone è costretto a muoversi su una retta entro un intervallo di ampiezza Δx , la sua posizione lungo tale coordinata è nota appunto con un'indeterminazione Δx . In base alle relazioni di indeterminazione di Heisenberg possiamo scrivere:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \gtrsim \hbar. \quad (12)$$

L'indeterminazione minima sulla componente x della quantità di moto risulta perciò

$$\Delta p_x = \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} / (2 \cdot \pi)}{1 \cdot 10^{-10} \text{ m}} = 1 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}. \quad (13)$$

Poiché

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$$

l'energia cinetica dell'elettrone è affetta da un'indeterminazione non minore di

$$\Delta K = \frac{\Delta p^2}{2m} = \frac{(1 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s})^2}{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = 5 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3 \text{ eV}. \quad (14)$$

Facciamo notare che, se l'indicazione per cui l'elettrone è confinato su una retta dovesse essere presa alla lettera, ciò comporterebbe che l'indeterminazione sulla sua posizione lungo gli assi y e z sia nulla.

Tema 2

Forza elettromotrice e differenza di potenziale

Una pila, e in generale un generatore di tensione, forniscono energia ai portatori di carica che circolano nel circuito. Possiamo immaginare che in una pila, a circuito aperto, esista ai due morsetti una certa quantità di carica statica non bilanciata, di segno opposto. Una distribuzione di cariche di questo tipo possiede evidentemente una energia potenziale elettrica, dato che è possibile accelerare i portatori di carica permettendo loro di raggiungere le cariche di segno opposto. Quando si chiude il circuito avviene appunto questo. I portatori di carica (in un circuito con conduttori metallici, come supporremo nel seguito, si tratta di elettroni) si muovono lungo il circuito sotto l'azione del campo elettrico generato dalla distribuzione di cariche: così facendo trasformano energia potenziale in energia cinetica, la quale viene poi trasformata in energia interna dei conduttori negli urti disordinati fra gli elettroni e il reticolo cristallino. L'esistenza nel circuito di una corrente continua attesta il fatto che nuova energia viene continuamente fornita ai portatori di carica.

L'energia viene fornita naturalmente dal generatore, il quale costringe gli elettroni a muoversi dal morsetto positivo a quello negativo *contro* il campo elettrico, fornendo così loro energia potenziale e permettendo il mantenimento della corrente. Con una metafora ben nota, possiamo paragonare il generatore a un montacarichi che solleva degli oggetti pesanti *contro* la forza peso, fornendo loro un'energia potenziale gravitazionale. Sia il montacarichi che il generatore compiono un lavoro, rispettivamente sugli oggetti pesanti e sugli elettroni, ed è proprio questo lavoro che si traduce in energia potenziale. Come nel montacarichi le forze che compiono lavoro *non* sono, in generale, di natura gravitazionale, nel generatore le forze che compiono lavoro sugli elettroni portandoli dal morsetto positivo a quello negativo *non* sono in generale di natura elettrica.

La quantità di lavoro eseguita dal generatore dipende dall'intensità di corrente presente nel circuito, ma il lavoro che il generatore è in grado di compiere sul singolo portatore di carica è una caratteristica intrinseca del generatore. Introduciamo pertanto una grandezza fisica definita come il rapporto fra il lavoro eseguito dal generatore sui portatori di carica *all'interno del generatore* e la carica complessiva che circola in esso:

$$F_{em} = \frac{W}{Q}. \quad (15)$$

Questa quantità ha, per ragioni storiche, il nome di *forza elettromotrice*. Si tratta di una denominazione infelice, perché come abbiamo visto la *f. e. m.* non

è affatto una forza, ma piuttosto un *lavoro specifico*. Possiamo osservare, inoltre, che le dimensioni fisiche della *f.e.m.* sono quelle di un'energia divisa per una carica, ovvero di una differenza di potenziale, per cui l'unità di misura della *f.e.m.* è il volt.

Quando il circuito viene chiuso collegando con dei conduttori i morsetti del generatore, fra tali morsetti è presente una differenza di potenziale ΔV_0 . Questa differenza di potenziale, in generale, non è uguale alla *f.e.m.* del generatore. Il prodotto $Q \Delta V_0$ rappresenta l'energia a disposizione dei portatori di carica per attraversare i conduttori esterni al generatore, mentre il prodotto $Q F_{em}$ rappresenta l'energia messa a disposizione dal generatore *complessivamente*, e in parte utilizzata dai portatori di carica per attraversare il generatore stesso. Più grande è l'intensità della corrente nel circuito, maggiore è l'energia necessaria ad attraversare il generatore e maggiore è quindi la *differenza* fra F_{em} e ΔV_0 . In un circuito dove è stabilita una corrente intensa la differenza di potenziale ai capi del generatore risulta sensibilmente diversa, dunque molto minore, del suo valore nominale, pari alla forza elettromotrice.

Possiamo descrivere questa situazione introducendo un modello del generatore, costituito da una scatola nera *impossibile da aprire*, al cui interno si trovano un generatore ideale e una resistenza, detta *resistenza interna*, posta in serie ad esso. Il generatore ideale fornisce ai *suoi* estremi una differenza di potenziale uguale alla F_{em} e costante, qualunque sia il valore dell'intensità di corrente che scorre nel circuito. Tali estremi, però, non sono accessibili. La differenza di potenziale effettivamente disponibile ai capi della scatola nera risulta minore della F_{em} per una quantità uguale alla caduta di tensione ohmica sulla resistenza interna. In base al modello appena descritto, possiamo scrivere una semplice relazione fra la F_{em} di un generatore e la differenza di potenziale ΔV_0 presente ai suoi capi quando nel circuito è stabilita una corrente di intensità I :

$$\Delta V_0 = F_{em} - r I \quad (16)$$

dove r rappresenta la resistenza interna del generatore. Occorre ricordare, comunque, che la resistenza interna non corrisponde ad alcun resistore reale che sia presente "dentro" il generatore.

Misura della forza elettromotrice di un generatore

Dalla discussione precedente possiamo concludere che la differenza tra la F_{em} di un generatore e la differenza di potenziale ai suoi capi risulta tanto più piccola quanto minore è l'intensità della corrente nel circuito in cui è presente il generatore. Da questo punto di vista, la forza elettromotrice può in effetti essere definita come la differenza di potenziale ai capi del generatore *a circuito aperto*. Questa definizione, però, non può essere applicata alla lettera per misurare la F_{em} : la misura della differenza di potenziale ai capi di un elemento richiede, infatti, di porre in parallelo ad esso un voltmetro; ma ponendo in parallelo al generatore un voltmetro si chiude appunto il circuito e nel voltmetro si stabilisce una corrente (è questa corrente che fa sì che la bobina interna al voltmetro subisca una forza da parte del magnete che l'avvolge e quindi ruoti, spostando l'ago che fornisce appunto la misura del voltmetro).

Comunque, se la corrente erogata è molto bassa, la caduta di tensione *interna al generatore* che compare nella (16) è trascurabile rispetto a ΔV_0 . Adottiamo perciò la soluzione di chiudere il generatore su un resistore di resistenza R_{ext}

molto elevata e di misurare la differenza di potenziale ai capi del resistore. Se $R_{ext} \gg r$, la (16) si può scrivere come

$$F_{em} = \Delta V_0 + r I = R_{ext} I + r I \simeq R_{ext} I. \quad (17)$$

Potenza elettrica

Come abbiamo già ricordato, per stabilire una corrente elettrica in un conduttore è necessario fornire ai portatori di carica un'energia pari a quella che essi perdono negli urti con il reticolo cristallino del conduttore. Per questo motivo, in effetti, ai capi del conduttore si osserva una *caduta di tensione*: la differenza fra il potenziale elettrico al quale si trovano i portatori di carica all'ingresso del conduttore e il potenziale elettrico al quale essi si trovano all'uscita del conduttore misura appunto il rapporto fra l'energia ΔE persa dai portatori di carica e la carica Q da essi trasportata:

$$\Delta V = \frac{\Delta E}{Q}. \quad (18)$$

In un intervallo di tempo Δt nel conduttore scorre una quantità di carica data da:

$$Q = I \Delta t. \quad (19)$$

Confrontando la (18) e la (19) possiamo concludere che l'energia dissipata dai portatori di carica nel conduttore è:

$$\Delta E = Q \Delta V = I \Delta t \Delta V. \quad (20)$$

Questa quantità dipende dall'intervallo di tempo considerato. Introduciamo allora il concetto di *potenza dissipata sul conduttore*, definita come il rapporto fra l'energia dissipata e l'intervallo di tempo in cui ciò avviene. Tale grandezza, il cui valore corrisponde all'energia consumata nell'unità di tempo, risulta indipendente dal tempo:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = I \Delta V. \quad (21)$$

Dobbiamo chiederci che effetti produce questo trasferimento di energia dalla corrente al conduttore. Come abbiamo detto, l'energia è trasferita attraverso urti che avvengono a livello microscopico. L'energia acquistata dal conduttore è quindi un'energia interna, che si manifesta attraverso un *aumento di temperatura* del conduttore stesso. Per effetto della corrente che è presente in esso, il conduttore *si scalda*.

Nel caso di un conduttore ohmico di resistenza R , vale per definizione la legge di Ohm:

$$\Delta V = R I \quad (22)$$

e la (21) prende la forma:

$$P = R I^2 = \frac{(\Delta V)^2}{R}. \quad (23)$$

Facciamo notare, comunque, che in generale la resistenza che compare in queste espressioni dipende dalla temperatura del conduttore. In un conduttore metallico, ad esempio, la resistenza aumenta con la temperatura. Di conseguenza, nell'applicare le relazioni così ricavate, non si può dare per scontato che R sia semplicemente una costante.

Resistenza interna

Dalla (16) si ricava che, se il generatore viene cortocircuitato mediante un conduttore esterno di resistenza trascurabile rispetto alla resistenza interna, praticamente tutta la tensione cade sulla resistenza interna stessa. In tal caso, infatti, la caduta di tensione sul conduttore esterno può essere trascurata (un voltmetro posto ai suoi capi indicherebbe una tensione praticamente nulla) e si ha

$$F_{em} = r I_{cc}.$$

Se la F_{em} è nota e se la corrente di corto circuito I_{cc} può essere determinata con un amperometro di resistenza interna trascurabile, possiamo misurare in questo modo la resistenza interna. Nel caso proposto dal testo:

$$r = \frac{F_{em}}{I_{cc}} = \frac{4,5 \text{ V}}{6 \text{ A}} = 0,75 \Omega. \quad (24)$$

Potenza dissipata sulle lampadine

Se una lampadina riporta l'indicazione di una potenza P e di una differenza di potenziale ΔV , ciò indica che quando ai suoi capi è presente tale differenza di potenziale, la potenza dissipata dalla lampadina è P . In base alla (23), ciò comporta che in queste condizioni la lampadina presenti una resistenza:

$$R = \frac{(\Delta V)^2}{P} \quad (25)$$

per cui alle lampadine del testo dobbiamo assegnare una resistenza, *in condizioni di massima tensione applicata*, pari a:

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{(\Delta V)^2}{P_A} = \frac{(4,5 \text{ V})^2}{3 \text{ W}} = 6,8 \Omega \\ R_B &= \frac{(\Delta V)^2}{P_B} = \frac{(4,5 \text{ V})^2}{5 \text{ W}} = 4,1 \Omega. \end{aligned}$$

Dobbiamo notare che, in condizioni differenti da quelle descritte, la temperatura del filamento delle lampadine sarà in generale diversa e il valore della resistenza varierà anch'esso. Il testo non contiene nessun accenno a questo aspetto, ma esso non può essere semplicemente trascurato. Anche se è vero che non si può dare una risposta alla richiesta del testo senza ipotizzare che R_A e R_B rimangano costanti, questa ipotesi dovrebbe essere esplicitata.

Ciò premesso, osserviamo che, *se le ipotesi fatte sono valide*, la corrente in ciascuna lampadina può essere ricavata dalla (17):

$$\begin{aligned} I_A &= \frac{F_{em}}{R_A + r} = \frac{4,5 \text{ V}}{6,8 \Omega + 0,75 \Omega} = 0,59 \text{ A} \\ I_B &= \frac{F_{em}}{R_B + r} = \frac{4,5 \text{ V}}{4,1 \Omega + 0,75 \Omega} = 0,92 \text{ A} \end{aligned}$$

ottenendo infine i seguenti valori della potenza dissipata:

$$\begin{aligned} P_{diss A} &= R_A (I_A)^2 = 6,8 \Omega \cdot (0,59 \text{ A})^2 = 2,4 \text{ W} \\ P_{diss B} &= R_B (I_B)^2 = 4,1 \Omega \cdot (0,92 \text{ A})^2 = 3,5 \text{ W}. \end{aligned}$$

Rendimento delle lampadine

L'uso del termine “rendimento” in questo contesto è purtroppo marcatamente gergale. Il rendimento è definito in generale come il rapporto fra energia utile sviluppata ed energia totale impiegata. Questo concetto non è qui applicabile. Il testo permette, con un certo sforzo, di concludere che l'estensore richiede il calcolo del rapporto fra la potenza effettivamente sviluppata da ciascuna lampadina e la sua potenza massima. Non si tratta certo di un rendimento nel senso termodinamico del termine. In questa accezione, la lampadina A ha un rendimento

$$\frac{P_{diss\ A}}{P_A} = \frac{2,4\ \text{W}}{3\ \text{W}} = 0,80 = 80\%$$

e la lampadina B ha un rendimento

$$\frac{P_{diss\ B}}{P_B} = \frac{3,5\ \text{W}}{5\ \text{W}} = 0,70 = 70\%.$$

Poiché la lampadina A lavora in condizioni più vicine a quelle di massima potenza sviluppata, questa lampadina apparirà più luminosa quando verrà collegata alla pila nel modo discusso.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2002

Indirizzo Scientifico Progetto Brocca

Trascrizione del testo e redazione delle soluzioni di Paolo Cavallo.

La prova

Il candidato svolga una relazione su uno solo dei seguenti due temi, a sua scelta, prestando particolare attenzione al corretto uso della terminologia scientifica.

Tema 1

L'effetto fotoelettrico rimase per lunghi anni un mistero fino alla scoperta delle sue leggi da parte di Albert Einstein e le attività sperimentali di Robert Andrews Millikan. Nel 1905, Einstein riuscì a fornire un'interpretazione del fenomeno introducendo il concetto di fotone, la cui esistenza fu poi confermata dalla scoperta dell'effetto Compton nel 1923. Einstein, Millikan e Compton ebbero il premio Nobel per la fisica rispettivamente negli anni 1921, 1923 e 1927.

Il candidato:

1. scriva e commenti le leggi fisiche dell'effetto fotoelettrico, descriva il fenomeno e proponga un esempio di applicazione tecnologica;
2. spieghi perché non è stato possibile interpretare l'effetto fotoelettrico utilizzando le caratteristiche di un'onda elettromagnetica;
3. descriva somiglianze e differenze tra il fotone di Einstein e il quanto di energia proposto da Planck nella radiazione del corpo nero;
4. descriva l'effetto Compton e commenti la formula:

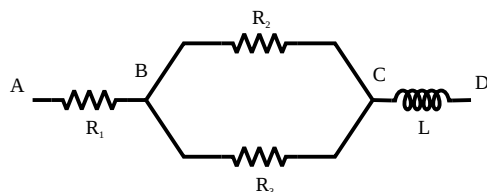
$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 \cdot c} (1 - \cos \theta)$$

che mette in relazione le grandezze fisiche interessate;

5. calcoli l'angolo di diffusione di un fotone che, avendo un'energia iniziale di 0,8 MeV, ne perde un terzo per effetto Compton:
($h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s, $m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg, $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s)

Tema 2

Una parte di un circuito (in figura) è costituita da tre resistori ($R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 200\ \Omega$, $R_3 = 300\ \Omega$) e da un solenoide posto in aria. Questo è lungo 5 cm, ha una sezione circolare di 16 cm^2 ed è formato da 1000 spire di resistenza trascurabile.



All'interno del solenoide si trova un piccolo ago magnetico che, quando non vi è passaggio di corrente, è perpendicolare all'asse del solenoide perché risente soltanto del campo magnetico terrestre ($B_t = 2 \cdot 10^{-5}\text{ T}$).

Il candidato:

1. esponga le sue conoscenze riguardo al campo magnetico terrestre e all'uso della bussola magnetica;
2. spieghi il concetto di resistenza elettrica, descriva il tipo di collegamento dei tre resistori R_1 , R_2 e R_3 e ne calcoli la resistenza totale;
3. spieghi il concetto di induttanza e calcoli l'induttanza del solenoide, dopo aver dimostrato come si ricava la formula per il suo calcolo;
4. avendo osservato che l'ago magnetico ha subito una deviazione, con un angolo di 30° rispetto alla direzione originaria, calcoli, in μA , l'intensità della corrente che attraversa ognuna delle tre resistenze e il solenoide;
5. nelle stesse condizioni precedenti, calcoli il potenziale elettrico nei punti A, B e C, sapendo che il punto D è collegato a massa;
6. sapendo che tra A e D è mantenuta la differenza di potenziale già calcolata, ricavi l'angolo di deviazione dell'ago magnetico che si ottiene eliminando il resistore R_2 e interrompendo, perciò, quel tratto di circuito.

La soluzione

Tema 1

Le leggi dell'effetto fotoelettrico

Nel redigere le risposte per questo quesito e i seguenti, abbiamo ripreso il testo della discussione delle prove d'esame relative agli anni 1997 e 2000.

L'effetto fotoelettrico può essere messo in evidenza utilizzando un opportuno tubo a vuoto con due elettrodi connessi a una pila che mantiene fra essi una differenza di potenziale assegnata. Poiché i due elettrodi sono isolati, nel circuito così costituito non passa alcuna corrente. Ma se il catodo (l'elettrodo connesso al polo negativo della pila) è costituito da una piastrina metallica, è possibile far passare una corrente nel circuito illuminando il catodo con una sorgente di radiazione elettromagnetica, visibile o ultravioletta. Finché la lunghezza d'onda della radiazione impiegata è *superiore* a un certo valore λ_0 , detto lunghezza d'onda di soglia, nel circuito non si osserva alcuna corrente, qualunque sia l'intensità della sorgente impiegata. La corrente passa soltanto se la radiazione ha una lunghezza d'onda uguale o inferiore a λ_0 .

Einstein propose un modello, basato sull'ipotesi che la luce abbia natura corpuscolare e sia costituita da particelle che oggi chiamiamo fotoni. Quando un fotone colpisce un elettrone nel metallo che costituisce il catodo, gli cede la propria energia hf , con f pari alla frequenza della luce incidente. Se la frequenza del fotone è troppo bassa (ovvero, se la lunghezza d'onda è troppo alta), l'energia ceduta all'elettrone è inferiore alla *funzione lavoro* W che misura l'energia necessaria ad estrarre un elettrone, e l'elettrone resta confinato nel metallo: qui, negli urti con il reticolo cristallino perde immediatamente l'energia acquistata. Se invece f è uguale o superiore a una frequenza di soglia f_0 (ovvero, se λ è uguale o inferiore a $\lambda_0 = c/f_0$) l'elettrone acquista un'energia almeno sufficiente a lasciare il metallo e a muoversi nel campo elettrico esterno stabilito dalla pila. La condizione che determina λ_0 è allora semplicemente:

$$W = \frac{hc}{\lambda_0}. \quad (1)$$

L'effetto fotoelettrico è sfruttato in diversi dispositivi, fra cui le *cellule fotoelettriche* impiegate come interruttori sensibili alla luce nei circuiti che regolano l'apertura di cancelli automatici o l'attivazione di sistemi di allarme. Quando la radiazione che illumina il catodo viene intercettata da un oggetto di passaggio, la corrente nel circuito si interrompe. La variazione di corrente può essere utilizzata come segnale che attiva il servomeccanismo di apertura di un cancello.

L'effetto fotoelettrico dal punto di vista dell'elettromagnetismo classico

Dal punto di vista dell'elettromagnetismo classico, l'effetto fotoelettrico è sconcertante. Se nel circuito si stabilisce una corrente, possiamo ipotizzare che il catodo illuminato emetta elettroni, in maniera simile a quello che avviene nell'effetto termoionico. L'energia necessaria ad abbandonare il catodo, indicata dalla funzione lavoro W , deve evidentemente essere fornita agli elettroni dalla radiazione incidente. Ma secondo l'elettromagnetismo classico l'energia della

radiazione non dipende dalla lunghezza d'onda. Per la precisione, la densità di energia elettromagnetica in una zona dello spazio in cui è presente un campo elettrico sinusoidale è direttamente proporzionale al quadrato del valore massimo del campo. In questa relazione non compaiono né la frequenza né la lunghezza d'onda dell'onda elettromagnetica in questione.

In altri termini, con una sorgente di radiazione abbastanza intensa e quindi in grado di generare un campo elettrico con un valore massimo sufficientemente intenso, si dovrebbe osservare un passaggio di corrente per qualunque valore della lunghezza d'onda. L'esistenza di un effetto di soglia resta classicamente inspiegabile.

I quanti di luce secondo Planck e secondo Einstein

L'effetto fotoelettrico fu spiegato da Einstein nel 1905 in base all'ipotesi dei quanti di luce, già avanzata in altra forma da Planck cinque anni prima a proposito del problema del corpo nero. In quel contesto, Planck aveva proposto di *quantizzare* gli scambi di energia fra radiazione e materia, ipotizzando che essi potessero avvenire soltanto per multipli di un'energia minima, data dal prodotto della costante h (oggi nota come *costante di Planck*) per la frequenza f della radiazione. Einstein estende l'ipotesi di Planck, proponendo di quantizzare *la radiazione stessa* e di considerarla come composta di corpuscoli o *quanti di luce* aventi energia hf . Ogni quanto ha quindi un'energia:

$$E_f = hf = \frac{hc}{\lambda}. \quad (2)$$

Vale la pena di far notare che il termine *fotone*, che il testo della prova sembra attribuire ad Einstein, è più tardo e non è dovuto a lui.

Schematicamente:

- somiglianze: sia Planck che Einstein superano l'elettromagnetismo classico, riconoscendo che per spiegare un insieme di fatti sperimentali (il comportamento del corpo nero e l'effetto fotoelettrico) è inevitabile introdurre una forma di *quantizzazione* dell'energia;
- differenze: mentre Planck quantizza soltanto gli scambi energetici fra materia e radiazione, lasciando alla radiazione stessa il carattere continuo che le attribuisce l'elettromagnetismo classico, Einstein quantizza la radiazione stessa, proponendo esplicitamente di unificare dal punto di vista corpuscolare la descrizione della materia e della radiazione.

L'effetto Compton

L'effetto Compton è osservabile mediante il seguente apparato sperimentale: una sorgente di raggi X viene usata per irraggiare un bersaglio di grafite; un apposito rivelatore raccoglie i raggi X diffusi al di là del bersaglio e ne misura la lunghezza d'onda. Si osserva che la lunghezza d'onda λ' dei raggi X diffusi è *maggiore* della lunghezza d'onda λ dei raggi incidenti.

Compton propose di spiegare la variazione della lunghezza d'onda considerando l'interazione fra i raggi X e gli elettroni della grafite come un urto elastico

fra un fotone e un elettrone. Scrivendo i principi di conservazione dell'energia e della quantità di moto totali (in forma relativistica, data la presenza del fotone), e risolvendo il sistema di equazioni corrispondente, Compton ottenne l'espressione:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 \cdot c} (1 - \cos \theta) \quad (3)$$

dove m_0 rappresenta la massa a riposo dell'elettrone, mentre θ è l'angolo di diffusione fra la direzione dei fotoni X incidenti e quella dei fotoni diffusi.

L'ottimo accordo fra i dati sperimentali e l'espressione proposta da Compton convinse definitivamente la comunità dei fisici della validità del modello corpuscolare della luce proposto da Einstein.

Il calcolo dell'angolo di diffusione

L'energia del fotone incidente è:

$$E = 0,8 \text{ MeV} = 0,8 \cdot 10^6 \text{ eV} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \frac{\text{J}}{\text{eV}} = 1,28 \cdot 10^{-13} \text{ J} \quad (4)$$

mentre l'energia del fotone diffuso è

$$E = \frac{2}{3} 0,8 \text{ MeV} = 0,85 \cdot 10^{-13} \text{ J}. \quad (5)$$

Le corrispondenti lunghezze d'onda sono:

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \cdot 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,28 \cdot 10^{-13} \text{ J}} = 1,55 \cdot 10^{-12} \text{ m} \quad (6)$$

$$\lambda' = \frac{hc}{E'} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \cdot 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{0,85 \cdot 10^{-13} \text{ J}} = 2,33 \cdot 10^{-12} \text{ m}. \quad (7)$$

La variazione di lunghezza d'onda è pertanto:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2,33 \cdot 10^{-12} \text{ m} - 1,55 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 0,78 \cdot 10^{-12} \text{ m} \quad (8)$$

e dalla (3) otteniamo:

$$\begin{aligned} \theta &= \arccos \left(1 - \frac{m_0 \cdot c \cdot \Delta\lambda}{h} \right) = \\ &= \arccos \left(1 - \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 0,78 \cdot 10^{-12} \text{ m}}{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}} \right) = \\ &= 47^\circ. \end{aligned} \quad (9)$$

Tema 2

Il campo magnetico e la bussola

Com'è noto, il pianeta Terra presenta un campo magnetico, la cui presenza può essere messa in evidenza osservando il fatto che un ago magnetizzato, libero di ruotare in un piano orizzontale, si dispone spontaneamente lungo una direzione ben precisa. Il campo magnetico terrestre ha molte proprietà importanti dal punto di vista geofisico e astronomico, ma molte di queste proprietà sono più spesso l'oggetto del corso di Scienze della Terra che del corso di Fisica.

Per quanto ci interessa in questo contesto, diremo che in prima approssimazione le linee del campo magnetico terrestre posso essere considerate analoghe a quelle di un magnete rettilineo disposto come l'asse terrestre. Il polo nord dell'ago di una bussola ha questo nome proprio perché tende a disporsi lungo tali linee in modo da indicare la direzione del Polo Nord terrestre. In base a questo fatto, dobbiamo osservare che il Polo Nord magnetico della Terra è, dal punto di vista magnetico, un polo sud. Va anche ricordato che la posizione dei poli magnetici non coincide esattamente con quella dei poli geografici, e che è soggetta a deriva nel tempo, e a fenomeni, non ancora del tutto spiegati, di inversione brusca di polarità (l'aggettivo "brusca" va inteso, naturalmente, rispetto a una scala geologica dei tempi...).

La resistenza elettrica

Per *resistenza elettrica* di un conduttore si intende quella grandezza fisica che misura la tendenza del conduttore a opporsi al passaggio di una corrente elettrica al proprio interno. Il concetto di resistenza non è univocamente definito se non per quei conduttori, detti *ohmici*, per i quali vale una legge di dipendenza lineare fra la differenza di potenziale imposta ai capi e l'intensità della corrente elettrica che li attraversa. Si tratta della ben nota *prima legge di Ohm*:

$$\Delta V = Ri \quad (10)$$

dove R è appunto la resistenza del conduttore in esame, misurata in ohm.

La resistenza di un conduttore ohmico non è in generale una costante, ma dipende dalla temperatura del conduttore. Un dispositivo progettato in modo tale da fornire ai propri capi una resistenza ben definita entro margini di temperatura (e quindi regimi di corrente) abbastanza ampi è detto un *resistore*. La prima legge di Ohm e le leggi di Kirchhoff, valide in circuiti con componenti lineari, permettono di dimostrare le seguenti affermazioni:

- due o più resistori connessi in modo da essere attraversati dalla stessa corrente (connessi *in serie*) sono equivalenti a un resistore avente come resistenza la somma delle loro resistenze;
- due o più resistori connessi in modo da essere sottoposti alla stessa differenza di potenziale (connessi *in parallelo*) sono equivalenti a un resistore avente come resistenza l'inverso della somma degli inversi delle loro resistenze.

Nel circuito descritto nel testo, il resistore R_1 è connesso in serie alla connessione in parallelo dei resistori R_2 e R_3 . La resistenza totale offerta dai tre resistori è

pertanto:

$$R_T = R_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1} = 100 \, \Omega + \left(\frac{1}{200 \, \Omega} + \frac{1}{300 \, \Omega} \right)^{-1} = 220 \, \Omega. \quad (11)$$

L'induttanza di un solenoide

In un qualunque dispositivo elettrico attraversato da una corrente assegnata, il flusso del campo magnetico concatenato è direttamente proporzionale all'intensità della corrente:

$$\Phi(\vec{B}) = Li \quad (12)$$

dove il coefficiente di proporzionalità L è detto coefficiente di autoinduzione o *induttanza* del dispositivo. Nel Sistema Internazionale, l'unità di misura dell'induttanza è l'henry (H).

In un solenoide di lunghezza l e sezione S , formato da N spire, attraversato da una corrente di intensità i , si stabilisce un campo magnetico uniforme, parallelo all'asse del solenoide, di intensità:

$$B = \mu_o \frac{N i}{l}. \quad (13)$$

Le linee di questo campo attraversano perpendicolarmente N volte la sezione del solenoide, generando un flusso:

$$\Phi = B S N = \mu_o \frac{N^2 S i}{l} \quad (14)$$

e richiamando la (12) si ottiene:

$$L = \frac{\Phi}{i} = \mu_o \frac{N^2 S}{l}. \quad (15)$$

Nel caso in esame l'induttanza del solenoide risulta:

$$L = 4 \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \frac{1000^2 \cdot 16 \text{ cm}^2}{5 \text{ cm}} = 40 \text{ mH}. \quad (16)$$

Il calcolo dell'intensità della corrente

A circuito aperto, l'ago magnetico all'interno del solenoide si orienta lungo la direzione del campo magnetico terrestre $\vec{B}_t$, perpendicolare all'asse del solenoide. A circuito chiuso e in condizioni di corrente continua, nel solenoide si stabilisce un ulteriore campo magnetico, $\vec{B}_s$, parallelo all'asse del solenoide. L'ago magnetico si dispone quindi lungo il campo magnetico risultante $\vec{B}_R = \vec{B}_t + \vec{B}_s$.

Dalla trigonometria elementare è immediato ricavare che:

$$B_s = B_t \cdot \tan \alpha = 2 \cdot 10^{-5} \text{ T} \cdot \tan(30^\circ) = 1,15 \cdot 10^{-5} \text{ T}. \quad (17)$$

Ricordando la (13) possiamo ricavare l'intensità della corrente necessaria a produrre il campo $\vec{B}_s$:

$$i = \frac{B_s l}{\mu_o N} = \frac{1,15 \cdot 10^{-5} \text{ T} \cdot 5 \text{ cm}}{4 \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \cdot 1000} = 458 \, \mu\text{A}. \quad (18)$$

La corrente i che attraversa il solenoide dev'essere uguale naturalmente a quella che attraversa il resistore R_1 . Nel parallelo formato da R_2 e R_3 , invece, la corrente si divide in maniera inversamente proporzionale alla resistenza, per cui le due correnti parziali risultano uguali rispettivamente a $275 \, \mu\text{A}$ e $183 \, \mu\text{A}$.

Il calcolo del potenziale elettrico

Poiché il punto D è collegato a massa, il suo potenziale è posto convenzionalmente a zero. Dato che la caduta di tensione ai capi dell'induttanza è trascurabile (com'è trascurabile la resistenza dell'induttanza stessa), anche il punto C è a potenziale zero. La differenza di potenziale fra A e C è uguale, per la legge di Ohm, alla resistenza totale R_T per l'intensità della corrente che attraversa i resistori:

$$\Delta V_{AC} = R_T i = 220 \, \Omega \cdot 458 \, \mu\text{A} = 101 \, \text{mV}. \quad (19)$$

Per quanto già detto sul potenziale di C, il potenziale in A risulta pertanto pari a 101 mV. Infine, sottraendo a questo potenziale la caduta di tensione su R_1 si ottiene il potenziale in B, $101 \, \text{mV} - 100 \, \Omega \cdot 458 \, \mu\text{A} = 55 \, \text{mV}$.

La deflessione dell'ago magnetico nel circuito modificato

Eliminando il resistore R_2 e interrompendo quel tratto di circuito, la resistenza totale del circuito risulta:

$$R'_T = R_1 + R_3 = 100 \, \Omega + 300 \, \Omega = 400 \, \Omega. \quad (20)$$

La nuova intensità di corrente risulta pertanto:

$$i' = \frac{\Delta V_{AD}}{R'_T} = \frac{\Delta V_{AC}}{R'_T} = \frac{101 \, \text{mV}}{400 \, \Omega} = 253 \, \mu\text{A}. \quad (21)$$

Questa corrente genera nel solenoide un campo magnetico:

$$B'_s = \mu_o \frac{N i'}{l} = 4 \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \cdot \frac{1000 \cdot 253 \, \mu\text{A}}{5 \, \text{cm}} = 0,64 \cdot 10^{-5} \, \text{T}. \quad (22)$$

Attraverso le stesse considerazioni trigonometriche già invocate si ottiene che il nuovo angolo di deflessione dell'ago magnetico è:

$$\alpha' = \arctan \left(\frac{B'_s}{B_t} \right) = \arctan \left(\frac{0,64 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{-5}} \right) = 18^\circ. \quad (23)$$

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2004

Indirizzo Scientifico Progetto Brocca

Trascrizione del testo e redazione delle soluzioni di Paolo Cavallo.

La prova

Il candidato svolga una relazione su uno solo dei seguenti due temi, a sua scelta, motivando i passaggi intermedi e prestando attenzione al corretto uso della terminologia scientifica.

Primo tema

Se si scalda l'estremità di una barra di ferro, si nota che essa emette inizialmente una radiazione termica che è percepita dalla pelle ma non dagli occhi. Se si continua a far aumentare la temperatura, l'estremità della barra diventa luminosa; il colore è prima rosso e poi, aumentando ancora la temperatura, tende al bianco.

Il candidato risponda ai seguenti quesiti.

1. Analizzare il fenomeno descritto e fornire una spiegazione fisica delle varie fasi che portano dalla iniziale emissione termica a quella luminosa, prima rossa e poi bianca.
2. Collegare il fenomeno descritto alle ricerche riguardanti la curva d'emissione della radiazione elettromagnetica del corpo nero che portarono Planck, nel 1900, a formulare l'ipotesi del quanto di energia. Descrivere il problema affrontato da Planck e la sua ipotesi finale.
3. Descrivere l'evoluzione del concetto di quanto di energia fino ad arrivare al concetto di fotone, introdotto da Einstein, e utilizzato nel 1905 per spiegare l'effetto fotoelettrico e, successivamente, l'effetto Compton. Fornire una spiegazione fisica dei due effetti.
4. Calcolare, in eV e in J, l'energia trasportata da un fotone proveniente da una lampada che emette luce gialla di lunghezza d'onda $\lambda = 600 \text{ nm}$.
5. Una piccola lastra di rame, di massa $m = 20 \text{ g}$ e calore specifico $c = 0,092 \text{ kcal}/(\text{kg} \cdot ^\circ \text{C})$, aumenta la sua temperatura di 2°C perché investita dalla radiazione infrarossa proveniente da una stufa. Sapendo che la frequenza della radiazione è $\nu = 3 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$, calcolare il numero dei fotoni che hanno interagito con il rame provocandone il riscaldamento.

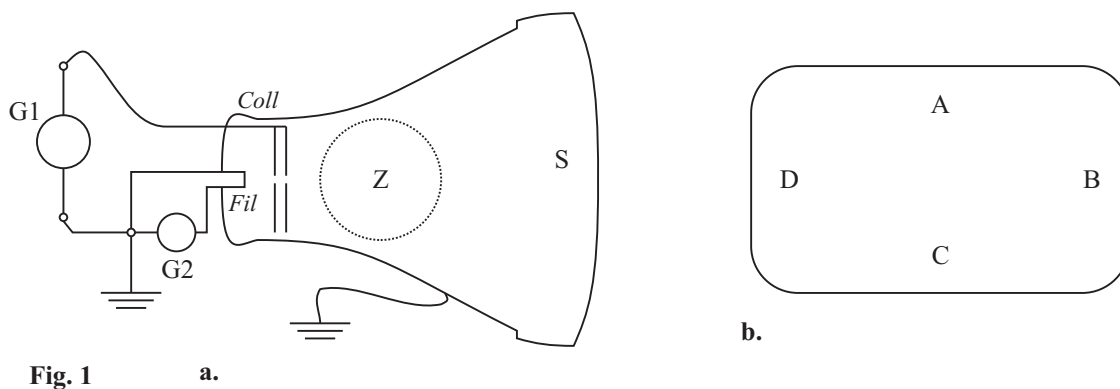
(Si ricordano i seguenti valori approssimati della velocità della luce e della costante di Planck: $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$; $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$)

Secondo tema

Le immagini che si formano sullo schermo di un apparecchio televisivo sono generate dall'interazione tra un fascio di elettroni veloci e i fosfori depositati sulla superficie interna dello schermo stesso. Gli elettroni provengono dalla sezione posteriore del tubo catodico dove un filamento metallico è portato all'incandescenza.

Il candidato risponda alle seguenti domande.

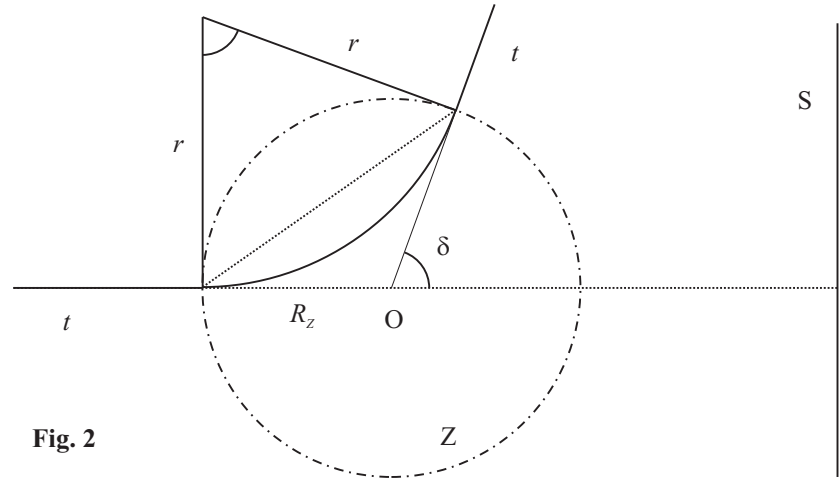
1. Spieghi perché l'alta temperatura del filamento favorisce l'emissione di elettroni.
2. Spieghi perché i fosfori depositati sulla superficie dello schermo emettono luce quando interagiscono con gli elettroni veloci del tubo catodico.
3. Nella figura 1a. è schematicamente rappresentato un tubo catodico nel quale sono visibili: due generatori di tensione continua (G1 per l'alta tensione e G2 per la bassa tensione), il filamento riscaldato (*Fil*), il collimatore del fascio elettronico (*Coll*) formato da due piastrine metalliche forate e parallele, lo schermo S, la zona Z dove gli elettroni sono deviati da un campo magnetico. Il candidato descriva e commenti:
 - (a) le funzioni e le polarità dei generatori G1 e G2;
 - (b) in quale zona del tubo catodico l'intensità del campo elettrico è elevata e dove, invece, è trascurabile.
4. Nell'ipotesi che la differenza di potenziale tra il filamento e il collimatore sia $\Delta V = 30$ kV, il candidato calcoli:
 - (a) l'energia cinetica acquistata dagli elettroni nel loro percorso tra *Fil* e *Coll*, espressa in elettronvolt e in joule;
 - (b) la velocità degli elettroni al loro passaggio attraverso il collimatore (ipotesi classica), commentando il risultato per quanto riguarda gli eventuali effetti relativistici.



5. Con riferimento alla figura 1b., che rappresenta la vista anteriore dello schermo, e nell'ipotesi che il campo magnetico nella zona Z sia uniforme, il candidato disegni il vettore $\vec{B}$ necessario, ogni volta, per far raggiungere al fascio di elettroni i punti A, B, C, D sullo schermo.
6. Il candidato si riferisca ora alla figura 2 dove tt è la traiettoria del fascio elettronico, r è il raggio dell'arco di traiettoria compiuto all'interno di Z, δ è l'angolo di deviazione del fascio elettronico. Si supponga che l'angolo di deviazione sia $\delta = 30^\circ$ e che il campo magnetico sia uniforme all'interno della zona sferica Z, di raggio $R_Z = 4$ cm, e nullo

altrove. Il candidato calcoli l'intensità del vettore $\vec{B}$ che porta a tale angolo di deviazione e ne indichi la direzione e il verso, osservando che lo schermo è perpendicolare al piano del foglio.

Nella figura 2 l'angolo δ è stato disegnato più grande di 30° con lo scopo di rendere l'immagine più compatta per facilitarne lo studio.



Si ricordano i seguenti dati approssimati:

- carica dell'elettrone $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- massa dell'elettrone $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- velocità della luce $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

La soluzione

Primo tema

L'irraggiamento termico

Dal testo del primo quesito non è facile stabile che cosa intenda l'estensore con le espressioni “analizzare il fenomeno descritto” e “fornire una spiegazione fisica”. Ci sono infatti almeno due strade possibili:

Le leggi del corpo nero Una barra di ferro riscaldata emette una radiazione elettromagnetica che è il risultato di due contributi distinti: la frazione di radiazione incidente riflessa dalla barra, e la radiazione termica tipica di un corpo nero¹ che si trovi alla stessa temperatura. Se questo secondo contributo è dominante, in termini di potenza irraggiata, possiamo trascurare il primo e trattare la barra incandescente come un corpo nero. In questa ipotesi, il fenomeno è descritto fisicamente da due leggi:

1. la legge di Stefan–Boltzmann, dimostrabile a partire dai principi della termodinamica, afferma che la potenza emessa per unità di area da un corpo nero alla temperatura assoluta T è direttamente proporzionale alla quarta potenza di T :

$$I = \sigma T^4 \quad (1)$$

dove σ è una costante universale e vale $\pi^2 k^4 / 60 \hbar^3 c^2 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$; all'aumentare della temperatura, quindi, l'intensità della radiazione di corpo nero emessa dalla barra aumenta molto rapidamente, giustificando così l'ipotesi che sia possibile trattare la barra stessa come un corpo nero, se la temperatura è elevata;

2. la legge di spostamento di Wien, inizialmente enunciata come legge sperimentale, poi giustificata in base alla teoria quantistica della radiazione, afferma che la temperatura T di un corpo nero e la lunghezza d'onda λ_{max} , corrispondente alla massima frazione di potenza emessa, sono inversamente proporzionali; si può scrivere:

$$b = \lambda_{max} T \quad (2)$$

dove $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$; la legge di Wien indica che, all'aumentare della temperatura, il massimo di emissione si sposta a lunghezze d'onda sempre più piccole, ovvero a frequenze sempre più elevate; è a questo “spostamento” che si deve il fatto che la barra emette dapprima radiazione infrarossa (percepita dalla pelle come calore, ma non dagli occhi) a temperature relativamente basse, quindi luce rossa a temperature più alte; quando la temperatura aumenta ancora, poi, il massimo di emissione si sposta e la barra inizia ad emettere apprezzabilmente anche all'estremo azzurro–violetto dello spettro visibile, apparendo perciò bianca.

L'emissione di luce da parte degli atomi Un altro approccio al fenomeno dell'incandescenza, meno rigoroso, ma più attento al meccanismo microscopico di emissione di radiazioni elettromagnetiche da parte della materia, può essere tentato in analogia con l'emissione della luce da parte dei gas. Scaldando un gas, in effetti, si ottiene l'emissione di luce e di altre radiazioni elettromagnetiche. Questo, secondo la teoria quantistica, perché gli atomi del gas acquistano energia negli urti disordinati dovuti all'agitazione termica e, se l'energia scambiata è sufficiente, l'atomo può passare dal livello energetico fondamentale a un livello eccitato; subito dopo esso torna al livello fondamentale, emettendo un fotone di energia pari alla differenza di energia fra i livelli. La frequenza della luce emessa dipende quindi dalla particolare transizione fra livelli che ha luogo. Una prima spiegazione di questo processo fu data nel 1913, per quanto riguarda l'atomo di idrogeno, da Niels Bohr.

¹Per il concetto di corpo nero si rimanda alla discussione del quesito seguente.

All'aumentare della temperatura, aumenta il numero dei livelli accessibili e quindi il numero delle frequenze emesse dal gas. Si ottiene il ben noto *spettro a righe* tipico dei gas.

La differenza fondamentale fra l'emissione di luce da parte dei gas e l'incandescenza di un solido è il carattere *continuo* dello spettro emesso in quest'ultimo caso. La radiazione emessa da un solido caldo, infatti, non contiene soltanto certe frequenze, come nel caso dei gas, ma tutte le frequenze comprese in un certo intervallo. Non è difficile capire che questa differenza è dovuta al fatto che i livelli energetici disponibili nel caso di un solido, formato da un numero enorme di atomi legati insieme, sono molto diversi da quelli di un atomo singolo. In particolare, si può mostrare che i livelli formano *bande* costituite da un enorme numero di livelli energetici estremamente vicini fra loro. Le transizioni possibili sono perciò moltissime, e allo stesso modo sono moltissime le frequenze emesse, che vanno così a formare uno *spettro continuo*.

Planck e il corpo nero

In fisica si definisce *corpo nero* un corpo qualsiasi che abbia la proprietà di assorbire tutta la radiazione elettromagnetica incidente su esso, senza rifletterla affatto. Un corpo nero emette perciò radiazione soltanto in virtù della sua temperatura, secondo la legge di Stefan-Boltzmann.

Lo studio sperimentale dell'emissione termica del corpo nero, negli ultimi decenni dell'Ottocento, mise in evidenza che la potenza emessa dall'unità di area di un corpo nero a una data temperatura variava con la frequenza secondo un andamento caratteristico, descritto dalla curva qui riprodotta.



Figura 1: Curva di emissione del corpo nero

Questa curva rappresenta una *funzione di distribuzione*. L'ordinata non fornisce il valore della potenza emessa a una determinata frequenza, ma il numero che occorre moltiplicare per il piccolo intervallo df di frequenza considerato per ottenere la potenza emessa nell'intervallo

di frequenze che va da f a $f + df$. L'area compresa tra la curva e l'asse delle ascisse corrisponde alla potenza totale emessa (sempre per unità di area).

Come si vede, la curva presenta un picco, che corrisponde alla λ_{max} che compare nella legge di spostamento di Wien.

La curva (1) rappresentò un problema irrisolvibile per la fisica classica. Tutti gli sforzi per dedurre dall'elettromagnetismo di Maxwell un'espressione per la potenza irraggiata conducevano infatti a un risultato inaccettabile: la potenza doveva aumentare senza limiti all'aumentare della frequenza. È facile capire che, se ciò fosse vero, la potenza totale emessa, cioè l'area sotto la curva, dovrebbe risultare infinita. In altri termini, un corpo nero (e anche una barra di ferro riscaldata) dovrebbe emettere una quantità infinita di energia.

Alla fine dell'Ottocento, Planck affrontò questo problema e nel 1900 riuscì a dimostrare che era possibile ottenere un'espressione matematica in ottimo accordo con la curva sperimentale introducendo un'ipotesi supplementare: che gli scambi di energia fra la materia e la radiazione a una data frequenza non avvengano per quantità arbitrarie, variabili con continuità, ma soltanto per *quanti discreti*, multipli interi di un quanto di energia elettromagnetica di valore hf . La costante universale h è detta *costante di Planck* e vale $(6,62606876 \pm 0,00000052) \text{ J} \cdot \text{s}$ secondo misure recenti.

Einstein e i quanti di luce

L'ipotesi di Planck fu ripresa da Einstein in un celebre articolo del 1905 sull'effetto fotoelettrico. (Si tratta dell'articolo che gli valse il premio Nobel nel 1922. Il 2005, anniversario dei cento anni della pubblicazione di quell'articolo e di altri, fra i quali gli articoli che segnarono la nascita della teoria della relatività, è stato proclamato anno mondiale della fisica.)

Qui di seguito si riproduce quanto già scritto nella discussione della prova d'esame del 1997.

L'effetto fotoelettrico può essere messo in evidenza utilizzando un opportuno tubo a vuoto con due elettrodi connessi a una pila che mantiene fra essi una differenza di potenziale assegnata. Poiché i due elettrodi sono isolati, nel circuito così costituito non passa alcuna corrente. Ma se il catodo (l'elettrodo connesso al polo negativo della pila) è costituito da una piastrina metallica, è possibile far passare una corrente nel circuito illuminando il catodo con una sorgente di radiazione elettromagnetica, visibile o ultravioletta. Finché la lunghezza d'onda della radiazione impiegata è *superiore* a un certo valore λ_0 , detto lunghezza d'onda di soglia, nel circuito non si osserva alcuna corrente, qualunque sia l'intensità della sorgente impiegata. La corrente passa soltanto se la radiazione ha una lunghezza d'onda uguale o inferiore a λ_0 .

Dal punto di vista dell'elettromagnetismo classico, questo è effetto è sconcertante. Se nel circuito si stabilisce una corrente, possiamo ipotizzare che il catodo illuminato emetta elettroni, in maniera simile a quello che avviene nell'effetto termoeionico. L'energia necessaria ad abbandonare il catodo, indicata come *funzione lavoro* W , deve evidentemente essere fornita agli elettroni dalla radiazione incidente. Ma secondo l'elettromagnetismo classico l'energia della radiazione non dipende dalla lunghezza d'onda. In altri termini, con una sorgente di radiazione abbastanza intensa, si dovrebbe osservare un passaggio di corrente per qualunque valore della lunghezza d'onda. L'esistenza di un effetto di soglia resta inspiegabile.

L'effetto fotoelettrico fu spiegato da Einstein nel 1905 in base all'ipotesi dei quanti di luce, già avanzata in altra forma da Planck cinque anni prima a proposito del problema del corpo nero. Planck aveva proposto di *quantizzare* gli scambi di energia fra radiazione e materia, ipotizzando che essi potessero avvenire soltanto per multipli di un'energia minima, data dal prodotto della costante h (oggi nota come *costante di Planck*) per la frequenza f della radiazione. Einstein estende l'ipotesi di Planck, proponendo di quantizzare la radiazione stessa e di considerarla come composta di *quanti di luce* aventi energia hf . Indicheremo questi quanti

con il nome di *fotoni*, assegnato loro soltanto in seguito. Ogni fotone ha quindi un'energia:

$$E_f = h f = \frac{h c}{\lambda}. \quad (3)$$

Einstein propose il seguente modello. Quando un fotone colpisce un elettrone nel metallo che costituisce il catodo, gli cede la propria energia $h f$. Se la frequenza del fotone è troppo bassa (ovvero, se la lunghezza d'onda è troppo alta), l'energia ceduta all'elettrone è inferiore a W e l'elettrone resta confinato nel metallo, dove negli urti con il reticolo cristallino perde immediatamente l'energia acquistata. Se invece f è uguale o superiore a una frequenza di soglia f_0 (ovvero, se λ è uguale o inferiore a $\lambda_0 = c/f_0$) l'elettrone acquista un'energia almeno sufficiente a lasciare il metallo e a muoversi nel campo elettrico esterno stabilito dalla pila. La condizione che determina λ_0 è allora semplicemente:

$$W = \frac{h c}{\lambda_0}. \quad (4)$$

A proposito dell'effetto Compton si riproduce quanto già scritto nella discussione della prova d'esame del 2002.

L'effetto Compton è osservabile mediante il seguente apparato sperimentale: una sorgente di raggi X viene usata per irraggiare un bersaglio di grafite; un apposito rivelatore raccoglie i raggi X diffusi al di là del bersaglio e ne misura la lunghezza d'onda. Si osserva che la lunghezza d'onda λ' dei raggi X diffusi è *maggiore* della lunghezza d'onda λ dei raggi incidenti.

Compton propose di spiegare la variazione della lunghezza d'onda considerando l'interazione fra i raggi X e gli elettroni della grafite come un urto elastico fra un fotone e un elettrone. Scrivendo i principi di conservazione dell'energia e della quantità di moto totali (in forma relativistica, data la presenza del fotone), e risolvendo il sistema di equazioni corrispondente, Compton ottenne l'espressione:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 \cdot c} (1 - \cos \theta) \quad (5)$$

dove m_0 rappresenta la massa a riposo dell'elettrone, mentre θ è l'angolo di diffusione fra la direzione dei fotoni X incidenti e quella dei fotoni diffusi.

L'ottimo accordo fra i dati sperimentali e l'espressione proposta da Compton convinse definitivamente la comunità dei fisici della validità del modello corpuscolare della luce proposto da Einstein.

Sempre dalla discussione del 2002, si possono ripetere le conclusioni, che riassumono in termini di analogie e differenze l'evoluzione del concetto di quanto di energia fino al concetto di fotone:

- somiglianze: sia Planck che Einstein superano l'elettromagnetismo classico, riconoscendo che per spiegare un insieme di fatti sperimentali (il comportamento del corpo nero e l'effetto fotoelettrico) è inevitabile introdurre una forma di *quantizzazione* dell'energia;
- differenze: mentre Planck quantizza soltanto gli scambi energetici fra materia e radiazione, lasciando alla radiazione stessa il carattere continuo che le attribuisce l'elettromagnetismo classico, Einstein quantizza la radiazione stessa, proponendo esplicitamente di unificare dal punto di vista corpuscolare la descrizione della materia e della radiazione.

I fotoni emessi da una lampada

Se la lampada emette luce monocromatica di lunghezza d'onda $\lambda = 600 \text{ nm}$, la frequenza della radiazione risulta:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{600 \text{ nm}} = 5,00 \cdot 10^{14} \text{ Hz}. \quad (6)$$

L'energia di un singolo fotone si ottiene immediatamente dalla relazione di Planck:

$$E = hf = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 5,00 \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 3,31 \cdot 10^{-19} \text{ J}. \quad (7)$$

Un elettronvolt è uguale all'energia potenziale a disposizione di un elettrone sottoposto a una differenza di potenziale di 1 V. Vale pertanto:

$$1 \text{ eV} = q_e \cdot \Delta V = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}. \quad (8)$$

L'energia E vale quindi in elettronvolt:

$$E = 3,31 \cdot 10^{-19} \text{ J} \cdot \frac{1 \text{ eV}}{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 2,07 \text{ eV}. \quad (9)$$

I fotoni assorbiti da una lastra

In base ai dati forniti, sappiamo che la capacità termica della lastra di rame vale:

$$C = c \cdot m = 0,092 \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot ^\circ \text{C}} \cdot 20 \text{ g} = 92 \frac{\text{cal}}{\text{kg} \cdot ^\circ \text{C}} \cdot \frac{4,184 \text{ J}}{1 \text{ cal}} \cdot 0,020 \text{ kg} = 7,7 \frac{\text{J}}{^\circ \text{C}}. \quad (10)$$

La variazione di energia termica della lastra, che subisce una variazione di temperatura ΔT , risulta allora:

$$\Delta U = C \cdot \Delta T = 7,7 \frac{\text{J}}{^\circ \text{C}} \cdot 2 ^\circ \text{C} = 15,4 \text{ J}. \quad (11)$$

Per il primo principio della termodinamica, questa variazione di energia dev'essere uguale all'energia assorbita, come calore irraggiato Q , dalla lastra. L'energia totale della radiazione incidente sulla piastra è perciò uguale a Q .

Ma la radiazione è "composta" di fotoni di frequenza ν e energia:

$$E = h\nu = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^{13} \text{ Hz} = 1,99 \cdot 10^{-20} \text{ J}. \quad (12)$$

Il numero dei fotoni assorbiti è quindi pari a:

$$N = \frac{Q}{E} = \frac{15,4 \text{ J}}{1,99 \cdot 10^{-20} \text{ J}} = 7,74 \cdot 10^{20}. \quad (13)$$

Secondo tema

L'effetto termoionico

Il filamento metallico contiene elettroni in moto con energie casuali. L'energia di ciascun elettrone è però insufficiente a permettergli di sottrarsi al campo elettrico generato dagli ioni positivi che formano il reticolo cristallino. L'energia necessaria ad estrarre un elettrone dal reticolo è detta *lavoro di estrazione* W_e .

Quando il reticolo viene scaldato, l'energia fornita si distribuisce casualmente agli elettroni. Alcuni di essi acquistano così un'energia almeno pari a W_e e possono uscire dal filamento. All'esterno del filamento il campo elettrico del reticolo, che tenderebbe a farli tornare indietro, è superato dal campo elettrico esterno, imposto da G1, che li accelera verso il collimatore.

L'emissione di luce da parte dello schermo

Quando gli elettroni accelerati dal campo elettrico fra il filamento e il collimatore urtano contro i fosfori depositati sullo schermo, cedono a questi parte della propria energia cinetica. L'energia assorbita dagli atomi o dalle molecole dei fosfori è sufficiente a portarli dallo stato fondamentale a uno stato eccitato, corrispondente a uno dei livelli energetici quantizzati disponibili. Successivamente il sistema ritorna nello stato fondamentale, emettendo un fotone di energia pari alla differenza di energia fra il livello eccitato e il livello più basso.

Il tubo catodico

Nello schema della figura 1a. il filamento *Fil* deve essere percorso da corrente, in modo da scaldarsi per effetto Joule; il generatore G2 è presente a questo scopo. Questo generatore può essere inserito nel circuito con entrambe le polarità possibili.

Il circuito costituito dal generatore G2, dal filamento e dai contatti che li uniscono presenta una resistenza piuttosto bassa, in modo da essere percorso da una corrente abbastanza elevata da portare la temperatura del filamento al valore opportuno.

Il generatore G1 non deve invece alimentare una corrente, come si vede anche dal fatto che il circuito di cui fa parte è aperto.

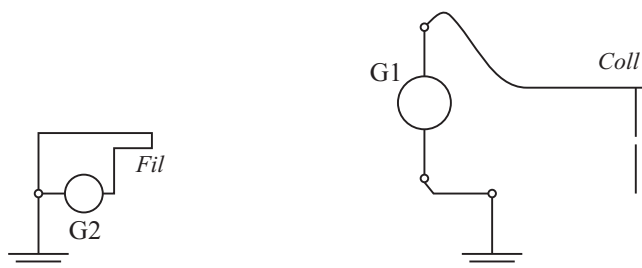


Figura 2: Dettagli da Fig. 1a.

Lo scopo di G1 è di polarizzare il “condensatore” avente il filamento *Fil* come armatura negativa e il collimatore *Coll* come armatura positiva. Perché questo avvenga, in modo da accelerare verso lo schermo gli elettroni emessi dal filamento, il polo positivo di G1 deve essere collegato al collimatore.

Gli elettroni emessi dal filamento si vengono a trovare in una zona (quella fra il filamento e il collimatore) dove il campo elettrico è molto intenso e diretto dal collimatore al filamento. Ciò produce una notevole forza elettrica sugli elettroni, che accelerano in verso opposto al campo, dirigendosi contro il collimatore.

Una volta raggiunto il collimatore, però, molti elettroni passano attraverso il foro nel collimatore e si trovano in una zona dove il campo elettrico è trascurabile. Questi elettroni si

muovono allora di moto rettilineo uniforme (se si trascura la gravità, dato il brevissimo tempo di volo fino allo schermo).

L'energia e la velocità finali degli elettroni

Il sistema di cariche di cui fa parte ogni elettrone, sottoposto alla differenza di potenziale ΔV di 30 kV fra filamento e collimatore, ha un'energia potenziale elettrostatica:

$$U_e = q_e \cdot \Delta V = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 30 \text{ kV} = 4,81 \cdot 10^{-15} \text{ J}. \quad (14)$$

(Per la definizione di elettronvolt, ricordata nella discussione del primo tema, questa energia vale semplicemente 30 keV.)

Quando gli elettroni attraversano la differenza di potenziale, l'energia potenziale elettrostatica si trasforma in energia cinetica degli elettroni stessi. Dopo l'uscita dal collimatore, la velocità e dunque l'energia cinetica degli elettroni non varia più (grazie anche all'alto vuoto realizzato nel tubo catodico).

Al momento dell'impatto con lo schermo, ogni elettrone ha pertanto un'energia cinetica $K = 4,81 \cdot 10^{-15} \text{ J} = 30 \text{ keV}$.

Per la fisica classica, l'energia cinetica di ogni elettrone si può scrivere come:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \quad (15)$$

il che porterebbe a concludere che la velocità con la quale gli elettroni colpiscono lo schermo sia pari a:

$$v_{cl} = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4,81 \cdot 10^{-15} \text{ J}}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} = 1,03 \cdot 10^8 \text{ m/s}. \quad (16)$$

Come si può vedere, questo valore della velocità è pari a più di un terzo della velocità della luce nel vuoto. L'ipotesi che sia possibile applicare la fisica classica al moto degli elettroni nel tubo catodico è perciò discutibile.

In relatività ristretta, l'energia di una particella in moto è data dall'espressione

$$E = \gamma m c^2 \quad (17)$$

dove compare il fattore di dilatazione

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (18)$$

L'energia totale di una particella in moto è anche uguale alla somma della sua energia di riposo e della sua energia cinetica:

$$E = m c^2 + K \quad (19)$$

che per i nostri elettroni vale:

$$\begin{aligned} 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 + 4,81 \cdot 10^{-15} \text{ J} &= 82,0 \cdot 10^{-15} \text{ J} + 4,8 \cdot 10^{-15} \text{ J} = \\ &= 86,8 \cdot 10^{-15} \text{ J}. \end{aligned} \quad (20)$$

Il rapporto fra E e l'energia a riposo ci fornisce il valore di γ :

$$\gamma = \frac{E}{m c^2} = \frac{86,8 \cdot 10^{-15} \text{ J}}{82,0 \cdot 10^{-15} \text{ J}} = 1,06. \quad (21)$$

Questo valore, anche se ancora abbastanza vicino a 1, è abbastanza grande da dover essere tenuto in conto dai progettisti in vista di un funzionamento ottimale del televisore.

La direzione e il verso del campo magnetico

Guardando la figura 1b., gli elettroni si muovono perpendicolarmente al foglio e uscenti da esso. Per applicare al fenomeno la regola della mano destra relativa al prodotto vettoriale che compare nella forza di Lorentz $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$, orientiamo il pollice in verso *entrante* al foglio, per tenere conto della carica negativa degli elettroni. Perché gli elettroni siano soggetti a una forza deviante diretta verso A, il campo $\vec{B}$ deve essere orizzontale e orientato da destra a sinistra.

In modo analogo otteniamo i vettori riassunti nella figura seguente.

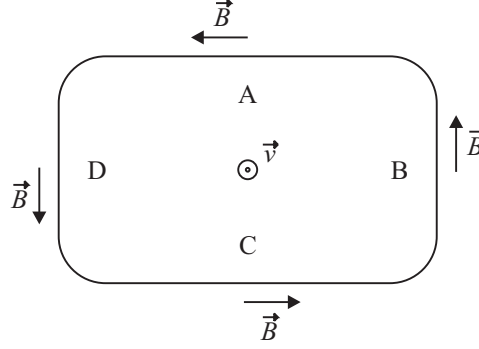


Figura 3: Fig. 1b. modificata

L'intensità del campo magnetico

Il teorema dei seni, applicato due volte ai triangoli isosceli tracciati nella figura 2, permette di calcolare il raggio di curvatura richiesto:

$$r = \frac{\frac{R_Z}{\sin(\delta/2)} \sin(180^\circ - \delta)}{\sin(\delta)} \sin\left(\frac{180^\circ - \delta}{2}\right) = 14,9 \text{ cm.} \quad (22)$$

Poiché $\vec{v}$ e $\vec{B}$ sono perpendicolari per gli elettroni nel tubo catodico, la forza di Lorentz che agisce su di essi vale:

$$F = q_e v B \quad (23)$$

mentre la forza centripeta necessaria a far muovere un elettrone su una traiettoria circolare di raggio r con velocità v è:

$$F = m \frac{v^2}{r}. \quad (24)$$

Uguagliando i secondi membri della (23) e della (24), ricaviamo B :

$$q_e v B = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow B = \frac{m v}{q_e r} = \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1,03 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 0,149 \text{ m}} = 3,93 \text{ mT.} \quad (25)$$

In questo calcolo abbiamo usato il valore di v ottenuto in precedenza con un calcolo classico. Se dovessimo progettare accuratamente il televisore, dovremmo ripetere il calcolo in forma relativistica, per evitare che l'intensità del campo magnetico desiderato risulti sbagliata.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2006

Indirizzo Scientifico Tecnologico Progetto Brocca

Trascrizione del testo e redazione delle soluzioni di Paolo Cavallo.

La prova

Il candidato svolga una relazione su uno solo dei seguenti due temi, a sua scelta, prestando particolare attenzione al corretto uso della terminologia scientifica e delle cifre significative nella presentazione dei risultati numerici.

Primo tema

L'effetto fotoelettrico, che presenta oggi tante applicazioni tecnologiche, si basa su una fondamentale interpretazione teorica che ha contribuito in modo essenziale allo sviluppo della fisica contemporanea.

Il candidato risponda ai seguenti quesiti e, dove è necessario effettuare calcoli, descriva i passaggi intermedi e commenti le conclusioni.

1. Relazionare sulla spiegazione teorica dell'effetto fotoelettrico proposta da Albert Einstein, confrontandola con i falliti tentativi d'interpretazione basati sulla fisica classica.
2. Dopo avere scritto e commentato le leggi che governano l'effetto fotoelettrico, proporre un esempio pratico descrivendo un'applicazione tecnologica e spiegandone il funzionamento.
3. Calcolare la lunghezza d'onda corrispondente alla frequenza di soglia per l'estrazione di fotoelettroni dal potassio, sapendo che il suo lavoro di estrazione è 2,21 eV.
4. Calcolare, in J e in eV, la massima energia cinetica e la corrispondente quantità di moto degli elettroni estratti da una superficie ricoperta di potassio irradiata con raggi ultravioletti di lunghezza d'onda $\lambda = 248,2 \text{ nm}$ e calcolare la corrispondente lunghezza d'onda di de Broglie.

Si ricordano i seguenti valori approssimati:

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}; \quad m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}; \quad h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}; \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Secondo tema

L'effetto Joule ha tantissime applicazioni pratiche, anche all'interno delle nostre case. Il candidato risponda ai seguenti quesiti e, dove è necessario effettuare calcoli, descriva i passaggi intermedi e commenti le conclusioni.

1. Descrivere e spiegare l'effetto Joule con una breve relazione scientifica.
2. Spiegare perché la resistenza di un conduttore aumenta con l'aumento della temperatura. Cosa succede, invece, nel caso di un semiconduttore?
3. Rappresentare graficamente e commentare l'andamento dell'intensità di corrente nel filamento di una lampada, in funzione del tempo, da quando è freddo a quando è diventato incandescente (si supponga costante la ddp applicata al filamento).
4. Spiegare il significato dell'espressione "corto circuito" che si sente qualche volta come causa d'incendio in un appartamento.
5. Spiegare il concetto di "potenza elettrica" e ricavare le formule che permettono di calcolare sia l'energia e sia la potenza in corrente continua e alternata. Ricavare anche le rispettive unità di misura come grandezze derivate del Sistema SI.
6. Uno scaldabagno elettrico, con una potenza di 1,2 kW, contiene 80 litri d'acqua alla temperatura di 18 °C. Ammettendo che vi sia una dispersione di energia del 5%, calcolare:
 - (a) l'intensità di corrente che attraversa la resistenza, sapendo che la tensione di rete è 220 V;
 - (b) quanto tempo è necessario, approssimando al minuto, perché il termostato interrompa l'alimentazione elettrica sapendo che esso è predisposto per interromperla quando l'acqua ha raggiunto la temperatura di 40 °C;
 - (c) la spesa da sostenere per portare l'acqua da 18 °C a 40 °C, sapendo che il costo del servizio è di 0,13 Euro/kWh;
 - (d) la spesa sostenuta inutilmente a causa della dispersione di energia nello scaldabagno.

La soluzione

Primo tema

La spiegazione dell'effetto fotoelettrico

Nel redigere le risposte per questo quesito e i seguenti, abbiamo ripreso il testo della discussione delle prove d'esame relative agli anni 1997 e 2000.

L'effetto fotoelettrico può essere messo in evidenza utilizzando un opportuno tubo a vuoto con due elettrodi connessi a una pila che mantiene fra essi una differenza di potenziale assegnata. Poiché i due elettrodi sono isolati, nel circuito così costituito non passa alcuna corrente (fatto salvo il brevissimo transitorio per la carica delle capacità parassite presenti nel circuito). Ma se il catodo (l'elettrodo connesso al polo negativo della pila) è costituito da una piastrina metallica, è possibile far passare una corrente nel circuito illuminando il catodo con una sorgente di radiazione elettromagnetica, visibile o ultravioletta. Finché la lunghezza d'onda della radiazione impiegata è *superiore* a un certo valore λ_0 , detto lunghezza d'onda di soglia, nel circuito non si osserva alcuna corrente, qualunque sia l'intensità della sorgente impiegata. La corrente passa soltanto se la radiazione ha una lunghezza d'onda uguale o inferiore a λ_0 .

Einstein propose un modello, basato sull'ipotesi che la luce abbia natura corpuscolare e sia costituita da particelle che oggi chiamiamo fotoni. Quando un fotone colpisce un elettrone nel metallo che costituisce il catodo, gli cede la propria energia hf , con f pari alla frequenza della luce incidente. Se la frequenza del fotone è troppo bassa (ovvero, se la lunghezza d'onda è troppo alta), l'energia ceduta all'elettrone è inferiore alla *funzione lavoro* W che misura l'energia necessaria ad estrarre un elettrone, e l'elettrone resta confinato nel metallo: qui, negli urti con il reticolo cristallino, perde immediatamente l'energia acquistata. Se invece f è uguale o superiore a una frequenza di soglia f_0 (ovvero, se λ è uguale o inferiore a $\lambda_0 = c/f_0$) l'elettrone acquista un'energia almeno sufficiente a lasciare il metallo e a muoversi nel campo elettrico esterno stabilito dalla pila. La condizione che determina λ_0 è allora semplicemente:

$$W = \frac{hc}{\lambda_0}. \quad (1)$$

L'effetto fotoelettrico dal punto di vista dell'elettromagnetismo classico

Dal punto di vista dell'elettromagnetismo classico, l'effetto fotoelettrico è sconcertante. Se nel circuito si stabilisce una corrente, possiamo ipotizzare che il catodo illuminato emetta elettroni, in maniera simile a quello che avviene nell'effetto termoionico. L'energia necessaria ad abbandonare il catodo, indicata dalla funzione lavoro W , deve evidentemente essere fornita agli elettroni dalla radiazione incidente. Ma secondo l'elettromagnetismo classico l'energia della radiazione non dipende dalla lunghezza d'onda. Per la precisione, la densità di energia elettromagnetica in una zona dello spazio in cui è presente un campo elettrico sinusoidale è direttamente proporzionale al quadrato del valore massimo del campo. In questa relazione non compaiono né la frequenza né la lunghezza d'onda dell'onda elettromagnetica in questione.

In altri termini, con una sorgente di radiazione abbastanza intensa e quindi in grado di generare un campo elettrico con un valore massimo sufficientemente intenso, si dovrebbe osservare un passaggio di corrente per qualunque valore della lunghezza d'onda. L'esistenza di un effetto di soglia resta classicamente inspiegabile.

Le leggi dell'effetto fotoelettrico

Per il principio di conservazione dell'energia, l'energia che l'elettrone possiede appena al di fuori del catodo deve essere uguale all'energia ceduta dal fotone, diminuita dell'energia W necessaria ad abbandonare il metallo e, eventualmente, dell'ulteriore energia persa per collisioni con gli atomi del metallo. L'energia che un elettrone possiede dopo essere sfuggito al metallo è quindi al più uguale a:

$$E_e = E_f - W \quad (2)$$

dove E_f è l'energia del fotone incidente, mentre E_e è l'energia cinetica dell'elettrone estratto dal metallo.

Non appena l'elettrone è emesso dal catodo, esso viene accelerato dal campo elettrico imposto dalla pila fra gli elettrodi. Se la polarità del campo viene invertita, in modo che il catodo sia connesso al polo *positivo* della pila, la corrente nel circuito non va necessariamente a zero (*corrente inversa*), perché l'energia cinetica E_e può essere sufficiente a permettere all'elettrone di raggiungere l'elettrodo opposto. L'elettrone *risale* la ddp ΔV grazie all'energia cinetica che possiede, e in questo modo tale energia cinetica si trasforma nell'energia potenziale $E_p = e \cdot \Delta V$. Se ΔV è abbastanza grande, l'energia cinetica dell'elettrone non è sufficiente a permettergli di raggiungere l'elettrodo opposto e la corrente nel circuito va a zero: la ddp ΔV_{arr} necessaria ad ottenere questo risultato è nota come *potenziale di arresto*.

Un'applicazione dell'effetto fotoelettrico

L'effetto fotoelettrico è sfruttato in diversi dispositivi, fra cui le *cellule fotoelettriche* impiegate come interruttori sensibili alla luce nei circuiti che regolano l'apertura di cancelli automatici o l'attivazione di sistemi di allarme. Quando la radiazione che illumina il catodo viene intercettata da un oggetto di passaggio, la corrente nel circuito si interrompe. La variazione di corrente può essere utilizzata come segnale che attiva il servomeccanismo di apertura di un cancello.

La lunghezza d'onda di soglia

Poiché $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, il lavoro di estrazione del potassio risulta:

$$W = 2,21 \text{ eV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \frac{\text{J}}{\text{eV}} = 3,5 \cdot 10^{-19} \text{ J}. \quad (3)$$

Dall'equazione (1) si ricava, nel caso in esame:

$$\lambda_0 = \frac{hc}{W} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{3,5 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 5,7 \cdot 10^{-7} \text{ m}. \quad (4)$$

Le proprietà dei fotoelettroni

I fotoni della luce ultravioletta incidente hanno una frequenza:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{248,2 \text{ nm}} = 1,208 \cdot 10^{15} \text{ Hz}. \quad (5)$$

(In questo calcolo si è usato per c il valore più preciso $2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Dato che questo valore è ben noto, mentre ottenere la lunghezza d'onda della luce incidente con quattro cifre significative dovrebbe aver richiesto un impegno sperimentale non indifferente, sarebbe poco sensato arrivare a un risultato della frequenza *con una sola cifra significativa*, come dovremmo fare se utilizzassimo il valore fornito dal testo.)

L'energia dei singoli fotoni è pertanto

$$E_f = h \cdot f = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 1,208 \cdot 10^{15} \text{ Hz} = 8,0 \cdot 10^{-19} \text{ J}. \quad (6)$$

(Anche qui si sarebbe potuto ricorrere a un valore più preciso di h , facilmente disponibile anche con sette cifre significative.)

Dalla (2) otteniamo per l'energia cinetica dei fotoelettroni:

$$K = E_f - W = 8,0 \cdot 10^{-19} \text{ J} - 3,5 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 4,5 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2,8 \text{ eV}. \quad (7)$$

L'energia K è molto inferiore all'energia di riposo di un elettrone, che vale $E_r = m_e \cdot c^2 = 8,2 \cdot 10^{-14} \text{ J}$. Siamo dunque in regime non relativistico e possiamo ricavare la velocità degli elettroni con la formula newtoniana:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot K}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4,5 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} = 9,9 \cdot 10^5 \text{ m/s}. \quad (8)$$

La quantità di moto di un elettrone animato da tale velocità è, sempre secondo la meccanica newtoniana:

$$p = m_e \cdot v = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 9,9 \cdot 10^5 \text{ m/s} = 9,0 \cdot 10^{-25} \text{ kg} \cdot \text{m/s}. \quad (9)$$

Secondo una nota ipotesi di de Broglie, da cui prese le mosse la meccanica quantistica moderna, ad ogni particella materiale si deve associare un'onda di lunghezza d'onda inversamente proporzionale alla sua quantità di moto. In questo caso:

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{9,0 \cdot 10^{-25} \text{ kg} \cdot \text{m/s}} = 0,73 \text{ nm}. \quad (10)$$

Secondo tema

L'effetto Joule

L'effetto Joule è il fenomeno per il quale il passaggio di corrente all'interno di un conduttore determina un aumento di temperatura di quest'ultimo. L'aumento di temperatura dipende da vari fattori, fra cui la capacità termica del conduttore, la possibilità che esso ceda calore all'ambiente, l'intervallo di tempo preso in esame, e in particolar modo la differenza di potenziale ai capi del conduttore e la corrente stabilita su di esso.

Una pila, e in generale un generatore di tensione, forniscono energia ai portatori di carica che circolano in un conduttore. Possiamo immaginare che in una pila, a circuito aperto, esista ai due morsetti una certa quantità di carica statica non bilanciata, di segno opposto. Una distribuzione di cariche di questo tipo possiede evidentemente una energia potenziale elettrica, dato che è possibile accelerare i portatori di carica permettendo loro di raggiungere le cariche di segno opposto. Quando si chiude il circuito avviene appunto questo. I portatori di carica (in un conduttore metallico, ad esempio, si tratta di elettroni) si muovono lungo il circuito sotto l'azione del campo elettrico generato dalla distribuzione di cariche: così facendo trasformano energia potenziale in energia cinetica, la quale viene poi trasformata in energia interna del conduttore negli urti disordinati fra gli elettroni e il reticolo cristallino. Tale aumento di energia interna si manifesta attraverso un *aumento di temperatura* del conduttore stesso: per effetto della corrente che è presente in esso, il conduttore *si scalda*. Questa spiegazione dell'effetto Joule ricorre esclusivamente a concetti classici, ma resta in prima approssimazione molto utile.

La dipendenza della resistenza dalla temperatura

Gli stessi concetti classici a cui abbiamo fatto ricorso per illustrare l'effetto Joule posso essere invocati per tentare di spiegare il fatto sperimentale per cui, nei conduttori metallici, l'aumento di temperatura fa aumentare la resistività del materiale e di conseguenza la resistenza del conduttore. Si può dire, allora, che l'aumento di temperatura fa aumentare la velocità del moto di agitazione termica tanto dei nuclei atomici nel reticolo cristallino quanto degli elettroni di conduzione. Il primo processo, però, non può essere molto significativo, perché le velocità termiche dei nuclei sono comunque molto piccole in confronto a quelle degli elettroni incidenti, e una variazione delle prime non può portare a una variazione apprezzabile delle seconde.

Resta dunque il secondo processo. Se gli elettroni hanno velocità termiche maggiori, il tempo che intercorre fra un urto e l'altro diminuisce; dunque diminuisce il tempo durante il quale in campo elettrico esterno (applicato dalla pila) può accelerarli nel moto di conduzione, prima che un urto casuale riporti l'elettrone a condizioni in media uguali a quelle precedenti l'accelerazione. Questa è la spiegazione classica della dipendenza della resistenza dalla temperatura.

Va detto, però, che questa spiegazione comporta serie difficoltà. Molti esperimenti mostrano che gli elettroni di conduzione non variano apprezzabilmente la propria energia quando il conduttore viene scaldato: se l'aumento della resistività con la temperatura fosse davvero dovuto agli elettroni e fosse spiegabile secondo la fisica classica, il fenomeno non esisterebbe neppure.

Una spiegazione del fenomeno compatibile con il complesso delle osservazioni sperimentali viene data invece dalla teoria quantistica dei solidi. Si tratta però di un argomento molto avanzato, e non è verosimile che ci si aspetti che il candidato sia in grado di farvi ricorso.

Che il testo non richieda una spiegazione di carattere quantistico lo dimostra il diverso tenore della seconda parte della domanda. In essa non si chiede di "spiegare" il comportamento dei semiconduttori al variare della temperatura, ma soltanto di descriverlo. In effetti, i semiconduttori si comportano in maniera opposta a quella dei metalli: quando la temperatura aumenta, la resistività di un semiconduttore *diminuisce*. Il fenomeno è del tutto paradossale dal punto di vista classico, e può essere spiegato soltanto dalla teoria quantistica.

L'andamento della corrente all'aumentare della temperatura

In termini qualitativi, la variazione della corrente I al variare del tempo t nel filamento di una lampadina sottoposto a una differenza di potenziale costante può essere rappresentata come nella fig.(1), dove la differenza fra la curva ideale, corrispondente a una resistenza indipendente dalla temperatura, e la curva reale è stata opportunamente sottolineata. Al passare del tempo,

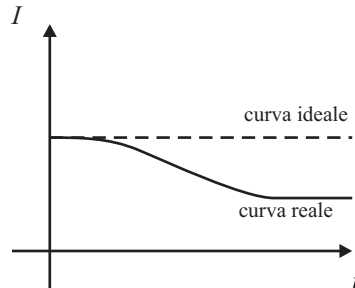


Figura 1: Relazione fra I e t

dapprima la temperatura del filamento aumenta e con essa diminuisce la corrente, secondo quanto previsto dalle legge di Ohm:

$$\Delta V = R \cdot I. \quad (11)$$

Se il filamento fosse isolato, la sua temperatura aumenterebbe costantemente, almeno fino a raggiungere la temperatura di fusione del materiale che lo costituisce. Ma il filamento perde energia per irraggiamento, e per questo motivo, raggiunta una particolare temperatura (che per una lampadina tradizionale è intorno ai 3000 K), si viene a creare una condizione di equilibrio dinamico: l'energia ulteriore che "entra" nel filamento come energia elettrica "fluisce" nell'ambiente come energia elettromagnetica. Restando costante l'energia, anche la temperatura del filamento, e di conseguenza la sua resistenza, non variano più, e la corrente si mantiene di qui in avanti costante.

Il corto circuito

Nella trattazione dei circuiti elettrici, l'espressione *corto circuito* indica il collegamento di due punti a potenziale differente mediante un conduttore di resistenza molto piccola. Per la legge di Ohm, questa situazione comporta una corrente di intensità molto elevata. Le considerazioni che precedono, e ancora meglio quelle che seguono, chiariscono che la presenza di una corrente elevata in un conduttore comporta che la temperatura di questo si alzi anche notevolmente. Se il conduttore è vicino a materiale infiammabile, la condizione di corto circuito può dare fuoco a questo materiale, comportando un principio di incendio.

La potenza elettrica

La grandezza fisica *potenza* è definita come il rapporto fra una variazione di energia (che può avere luogo perché un sistema guadagna o perde energia, o perché l'energia di un sistema passa da una forma ad un'altra) e l'intervallo di tempo in cui essa avviene:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t}. \quad (12)$$

È facile notare come, qualora l'energia possa essere scritta come una funzione del tempo, la potenza non rappresenti altro che la derivata dell'energia rispetto al tempo. In ogni caso, la potenza rappresenta la *velocità* con cui varia l'energia di un sistema, o una delle sue forme.

Come abbiamo visto, in un circuito elettrico l'energia elettrica si trasforma continuamente in energia interna dei conduttori che si scaldano. Si può quindi parlare di *potenza elettrica*,

indicando con questo termine la velocità con cui l'energia elettrica si trasforma in energia interna (o in altre forme di energia).

Ricordiamo che l'energia posseduta da un sistema di cariche può essere scritta come il prodotto di una di esse per il potenziale elettrico prodotto dalle altre:

$$E_{el} = q \cdot V. \quad (13)$$

Se la carica in esame passa da un punto a un altro, attraversando una ddp ΔV , la corrispondente variazione di energia elettrica è:

$$\Delta E_{el} = q \cdot \Delta V. \quad (14)$$

Sostituendo la (13) nella (12), si ottiene:

$$P = \frac{q \cdot \Delta V}{\Delta t} = \frac{q}{\Delta t} \cdot \Delta V = I \cdot \Delta V \quad (15)$$

dove abbiamo applicato la definizione di intensità di corrente come velocità di spostamento della carica:

$$I = \frac{q}{\Delta t}. \quad (16)$$

Si giunge così a un risultato molto utile: *la potenza elettrica in un conduttore percorso da corrente è uguale al prodotto dell'intensità di corrente per la differenza di potenziale ai capi del conduttore*. Sostituendo nella (15) a ogni grandezza le corrispondenti unità nel Sistema Internazionale, si osserva come l'equazione si traduca in una identità:

$$A \cdot V = A \cdot \frac{J}{A \cdot s} = \frac{J}{s} = W. \quad (17)$$

La (15) si può anche scrivere, grazie alla legge di Ohm:

$$P = I \cdot R \cdot I = R \cdot I^2. \quad (18)$$

Questa relazione è utile per ricavare l'espressione della potenza nel caso di una corrente alternata di ampiezza massima I_0 e pulsazione ω . In tal caso la *potenza istantanea* sarà data dall'espressione:

$$P(t) = R \cdot [I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)]^2. \quad (19)$$

Integrando la potenza $P(t)$ su un periodo $2\pi/\omega$ e dividendo il risultato per il periodo stesso, si ottiene l'espressione della *potenza media*:

$$\bar{P} = R \cdot \frac{I_0^2}{2} = R \cdot \left(\frac{I_0}{\sqrt{2}} \right)^2 \quad (20)$$

dove il termine $I_0/\sqrt{2}$ prende il nome di *corrente efficace*.

Si ottengono allo stesso modo le relazioni in termini di differenza di potenziale:

$$P = \frac{\Delta V^2}{R} \quad (21)$$

e

$$\bar{P} = \frac{\left(\frac{\Delta V_0}{\sqrt{2}} \right)^2}{R} \quad (22)$$

dove $\Delta V_0/\sqrt{2}$ è la *tensione efficace*.

Lo scaldabagno elettrico

Dalle relazioni precedenti si ricava che, per una potenza *media* di 1,2 kW e una tensione *efficace* di 220 V, l'intensità di corrente *efficace* dev'essere pari a:

$$I_0 = \frac{\bar{P}}{\Delta V_0} = \frac{1,2 \text{ kW}}{220 \text{ V}} = 5,45 \text{ A.} \quad (23)$$

Una quantità d'acqua pari a 80 L, ovvero con una massa di 80 kg, ha una capacità termica pari a:

$$C = 80 \text{ kg} \cdot 4,18 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} = 3,3 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{K}}. \quad (24)$$

Per produrre una variazione di temperatura di $40^\circ\text{C} - 18^\circ\text{C} = 22^\circ\text{C} = 22 \text{ K}$ è necessaria un'energia:

$$\Delta E = C \cdot \Delta T = 3,3 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 22 \text{ K} = 7,3 \text{ MJ.} \quad (25)$$

Dalla (12), e tendo conto che la potenza utile è pari al 95% di quella totale, si ricava un intervallo di tempo necessario pari a:

$$\Delta t = \frac{\Delta E}{P_{ut}} = \frac{7,3 \text{ MJ}}{0,95 \cdot 1,2 \text{ kW}} = 6,4 \cdot 10^3 \text{ s} \simeq 107 \text{ min.} \quad (26)$$

Il termostato interromperà l'alimentazione dopo circa un'ora e quarantasette minuti.

Questo intervallo di tempo è pari a 1,78 h. L'energia consumata in kilowattora è pertanto semplicemente $1,2 \text{ kW} \cdot 1,78 \text{ h} = 2,1 \text{ kWh}$. Dato il costo del servizio, ciò comporta una spesa di circa 27 centesimi.

Di tale spesa, il 5%, pari a poco più di un centesimo, è “inutile” o, meglio, è dovuta alle dispersioni di energia.

**ESAME DI STATO
DI LICEO SCIENTIFICO
2008**

**Corso Sperimentale – Progetto Brocca
Tema di Fisica**

La prova

Il candidato svolga una relazione su uno solo dei seguenti due temi, a sua scelta, prestando particolare attenzione al corretto uso della terminologia scientifica e delle cifre significative nella presentazione dei risultati numerici.

Primo tema

All'inizio del secolo scorso il fisico tedesco Max Planck interpretò i risultati sperimentali relativi alla radiazione del corpo nero introducendo l'ipotesi della quantizzazione dell'energia. Questa ipotesi, intesa inizialmente solo come uno stratagemma matematico utile per far coincidere i risultati teorici e quelli sperimentali, apparve invece come una realtà fisica pochi anni dopo, con l'interpretazione dell'effetto fotoelettrico fatta da Einstein e con la successiva conferma dovuta all'effetto Compton.

Il candidato spieghi:

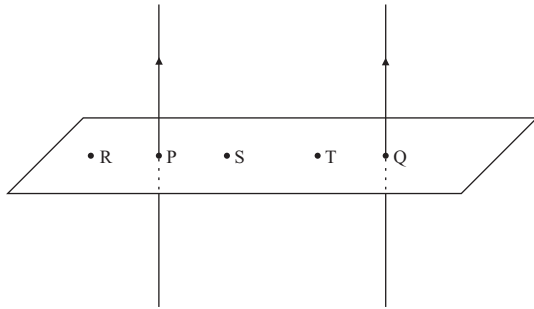
1. che cosa si intende per corpo nero e come lo studio della sua radiazione ha portato Planck ad avanzare l'ipotesi dei quanti di energia;
2. la differenza fra il concetto di “fotone” utilizzato da Einstein per spiegare l'effetto fotoelettrico e quello del “quanto di energia” proposto pochi anni prima da Planck;
3. i fenomeni fisici dell'effetto fotoelettrico e di quello Compton, descrivendo anche le leggi che permettono di interpretarne i risultati sperimentali.

Il candidato risolva infine il seguente problema.

Un fotone, con energia 0,1 MeV, interagisce con un elettrone la cui velocità può essere considerata trascurabile. Calcolare, sempre in MeV, l'energia finale del fotone sapendo che il suo angolo di deviazione dovuto all'effetto Compton è di 30° . Commentare il risultato ottenuto. Si ricorda che l'elettrone ha carica elettrica negativa $1,60 \cdot 10^{-19}$ C e massa $9,11 \cdot 10^{-31}$ kg. Inoltre, i valori della costante di Planck e della velocità della luce sono $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J·s e $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Secondo tema

Si abbiano due fili conduttori paralleli percorsi nello stesso verso dalla corrente elettrica d'intensità 1 A e posti alla distanza di 10 cm l'uno dall'altro.



Calcolare il modulo del vettore $\vec{B}$ nei punti R, S, T distanti rispettivamente 3 cm, 3 cm, 7 cm dal punto P, mettendo in evidenza i passaggi matematici necessari a ricavare l'unità di misura dell'induzione magnetica.

Disegnare le linee di forza passanti nei punti R, S, T, mettendo in evidenza la direzione e l'orientamento del vettore $\vec{B}$ negli stessi punti.

Ricavare l'espressione matematica che descrive l'andamento del modulo di $\vec{B}$ tra i punti P e Q e disegnarne il grafico sul piano cartesiano.

In ognuno dei punti S e T passa un protone con velocità $v = 2 \cdot 10^4$ m/s con la traiettoria parallela ai fili e con verso uguale a quello convenzionale della corrente elettrica. Ricavare il modulo, la direzione e il verso della forza di Lorentz che agisce su ognuno dei due protoni e rappresentarne la traiettoria con un disegno, anche se in maniera approssimata. Si ricorda che il protone ha la stessa carica dell'elettrone, ma con segno positivo ($1,60 \cdot 10^{-19}$ C).

La soluzione

Primo tema

Il corpo nero e Planck

Il testo di questa parte ricalca quanto già scritto nella discussione della prova d'esame del 2004.

In fisica si definisce *corpo nero* un corpo qualsiasi che abbia la proprietà di assorbire tutta la radiazione elettromagnetica incidente su esso, senza rifletterla affatto. Un corpo nero emette perciò radiazione soltanto in virtù della sua temperatura, secondo la legge di Stefan–Boltzmann.

Vale la pena sottolineare che un corpo nero non deve affatto essere *nero*. Se si realizza una cavità con un piccolo foro, tale foro si comporta come un corpo nero. Anche il Sole è in questo senso un corpo nero.

Lo studio sperimentale dell'emissione termica del corpo nero, negli ultimi decenni dell'Ottocento, mise in evidenza che la potenza emessa dall'unità di area di un corpo nero a una data temperatura variava con la frequenza secondo un andamento caratteristico, descritto dalla curva riprodotta nella figura (1).

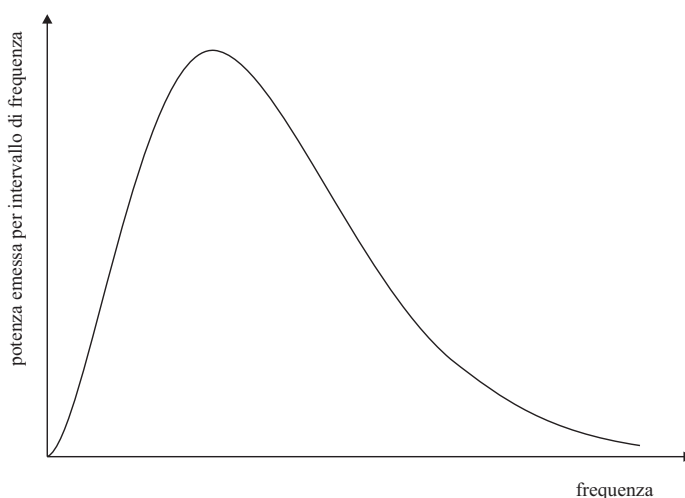


Figura 1: Curva di emissione del corpo nero

Questa curva rappresenta una *funzione di distribuzione*. L'ordinata non fornisce il valore della potenza emessa a una determinata frequenza, ma il numero che occorre moltiplicare per il piccolo intervallo df di frequenza considerato per ottenere la potenza emessa nell'intervallo di frequenze che va da f a $f + df$. L'area compresa tra la curva e l'asse delle ascisse corrisponde alla potenza totale emessa (sempre per unità di area).

Come si vede, la curva presenta un picco, che corrisponde alla λ_{max} che compare nella legge di spostamento di Wien.

La curva (1) rappresentò un problema irrisolvibile per la fisica classica. Tutti gli sforzi per dedurre dall'elettromagnetismo di Maxwell un'espressione per la potenza irradiata conducevano infatti a un risultato inaccettabile: la potenza doveva aumentare senza limiti all'aumentare della frequenza. È facile capire che, se ciò fosse vero, la potenza totale emessa, cioè l'area sotto la curva, dovrebbe risultare infinita. In altri termini, un corpo nero dovrebbe emettere una quantità infinita di energia.

Alla fine dell'Ottocento, Planck affrontò questo problema e nel 1900 riuscì a dimostrare che era possibile ottenere un'espressione matematica in ottimo accordo con la curva sperimentale introducendo un'ipotesi supplementare: che gli scambi di energia fra la materia e la radiazione a una data

frequenza non avvengano per quantità arbitrarie, variabili con continuità, ma soltanto per *quanti discreti*, multipli interi di un quanto di energia elettromagnetica di valore hf . La costante universale h è detta *costante di Planck* e vale $(6,62606896 \pm 0,00000033) \text{ J} \cdot \text{s}$ secondo le misure più recenti al momento in cui scriviamo (giugno 2008).

Confronto fra Einstein e Planck

Possiamo riassumere in termini di analogie e differenze il confronto fra le ipotesi avanzate dai due autori:

- somiglianze: sia Planck che Einstein superano l'elettromagnetismo classico, riconoscendo che per spiegare un insieme di fatti sperimentali (il comportamento del corpo nero e l'effetto fotoelettrico) è inevitabile introdurre una forma di *quantizzazione* dell'energia;
- differenze: mentre Planck quantizza soltanto gli scambi energetici fra materia e radiazione, lasciando alla radiazione il carattere continuo che le attribuisce l'elettromagnetismo classico, Einstein quantizza la radiazione stessa, proponendo esplicitamente di unificare dal punto di vista corpuscolare la descrizione della materia e della radiazione.

L'effetto fotoelettrico

Nel redigere la risposte per questo punto, abbiamo ripreso il testo della discussione delle prove d'esame relative agli anni 1997 e 2000.

L'effetto fotoelettrico può essere messo in evidenza utilizzando un opportuno tubo a vuoto con due elettrodi connessi a una pila che mantiene fra essi una differenza di potenziale assegnata. Poiché i due elettrodi sono isolati, nel circuito così costituito non passa alcuna corrente (fatto salvo il brevissimo transitorio per la carica delle capacità parassite presenti nel circuito). Ma se il catodo (l'elettrodo connesso al polo negativo della pila) è costituito da una piastrina metallica, è possibile far passare una corrente nel circuito illuminando il catodo con una sorgente di onde elettromagnetiche, visibili o ultraviolette. Finché la lunghezza d'onda della radiazione impiegata è *superiore* a un certo valore λ_0 , detto lunghezza d'onda di soglia, nel circuito non si osserva alcuna corrente, qualunque sia l'intensità della sorgente impiegata. La corrente passa soltanto se la radiazione ha una lunghezza d'onda uguale o inferiore a λ_0 .

Dal punto di vista dell'elettromagnetismo classico, l'effetto fotoelettrico è sconcertante. Se nel circuito si stabilisce una corrente, possiamo ipotizzare che il catodo illuminato emetta elettroni, in maniera simile a quello che avviene nell'effetto termoeionico. L'energia necessaria ad abbandonare il catodo, indicata dal *lavoro di estrazione* W , che misura l'energia necessaria ad estrarre un elettrone, deve evidentemente essere fornita agli elettroni dalla radiazione incidente. Ma secondo l'elettromagnetismo classico l'energia della radiazione non dipende dalla lunghezza d'onda. Per la precisione, la densità di energia elettromagnetica in una zona dello spazio in cui è presente un campo elettrico sinusoidale è direttamente proporzionale al quadrato del valore massimo del campo. In questa relazione non compaiono né la frequenza né la lunghezza d'onda dell'onda elettromagnetica in questione.

In altri termini, con una sorgente di radiazione abbastanza intensa e quindi in grado di generare un campo elettrico con un valore massimo sufficientemente intenso, si dovrebbe osservare un passaggio di corrente per qualunque valore della lunghezza d'onda. L'esistenza di un effetto di soglia resta classicamente inspiegabile.

Einstein propose un modello, basato sull'ipotesi che la luce abbia natura corpuscolare e sia costituita da quanti di luce che oggi chiamiamo fotoni. Quando un fotone colpisce un elettrone nel metallo che costituisce il catodo, gli cede la propria energia hf , con f pari alla frequenza della luce incidente. Se la frequenza del fotone è troppo bassa (ovvero, se la lunghezza d'onda è troppo alta), l'energia ceduta all'elettrone è inferiore al lavoro di estrazione W , e l'elettrone resta confinato

nel metallo: qui, negli urti con il reticolo cristallino, perde immediatamente l'energia acquistata. Se invece f è uguale o superiore a una frequenza di soglia f_0 (ovvero, se λ è uguale o inferiore a $\lambda_0 = c/f_0$) l'elettrone acquista un'energia almeno sufficiente a lasciare il metallo e a muoversi nel campo elettrico esterno stabilito dalla pila. La condizione che determina λ_0 è allora semplicemente:

$$W = \frac{hc}{\lambda_0}. \quad (1)$$

Per il principio di conservazione dell'energia, l'energia che l'elettrone possiede appena al di fuori del catodo deve essere uguale all'energia ceduta dal fotone, diminuita dell'energia W necessaria ad abbandonare il metallo e, eventualmente, dell'ulteriore energia persa per collisioni con gli atomi del metallo. L'energia che un elettrone possiede dopo essere sfuggito al metallo è quindi al più uguale a:

$$E_e = E_f - W \quad (2)$$

dove E_f è l'energia del fotone incidente, mentre E_e è l'energia cinetica dell'elettrone estratto dal metallo.

Non appena l'elettrone è emesso dal catodo, esso viene accelerato dal campo elettrico imposto dalla pila fra gli elettrodi. Se la polarità del campo viene invertita, in modo che il catodo sia connesso al polo *positivo* della pila, la corrente nel circuito non va necessariamente a zero (*corrente inversa*), perché l'energia cinetica E_e può essere sufficiente a permettere all'elettrone di raggiungere l'elettrodo opposto. L'elettrone *risale* la ddp ΔV grazie all'energia cinetica che possiede, e in questo modo tale energia cinetica si trasforma nell'energia potenziale $E_p = e \cdot \Delta V$. Se ΔV è abbastanza grande, l'energia cinetica dell'elettrone non è sufficiente a permettergli di raggiungere l'elettrodo opposto e la corrente nel circuito va a zero: la ddp ΔV_{arr} necessaria ad ottenere questo risultato è nota come *potenziale di arresto*.

L'effetto Compton

Nel redigere la risposte per questo punto, abbiamo ripreso il testo della discussione delle prove d'esame relative all'anno 2002.

L'effetto Compton è osservabile mediante il seguente apparato sperimentale: una sorgente di raggi X viene usata per irraggiare un bersaglio di grafite; un apposito rivelatore raccoglie i raggi X diffusi al di là del bersaglio e ne misura la lunghezza d'onda. Si osserva che la lunghezza d'onda λ' della frazione più significativa dei raggi X diffusi è *maggiore* della lunghezza d'onda λ dei raggi incidenti.

Compton propose di spiegare la variazione della lunghezza d'onda considerando l'interazione fra i raggi X e gli elettroni della grafite come un urto elastico fra un fotone e un elettrone. Scrivendo i principi di conservazione dell'energia e della quantità di moto totali (in forma relativistica, data la presenza del fotone), e risolvendo il sistema di equazioni corrispondente, Compton ottenne l'espressione:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m \cdot c} (1 - \cos \theta) \quad (3)$$

dove m rappresenta la massa a riposo dell'elettrone, mentre θ è l'angolo di diffusione fra la direzione dei fotoni X incidenti e quella dei fotoni diffusi.

La (3) può essere scritta nella forma:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C (1 - \cos \theta) \quad (4)$$

dove $\lambda_C = \frac{h}{m \cdot c} = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ è la cosiddetta lunghezza d'onda Compton dell'elettrone.

L'ottimo accordo fra i dati sperimentali e l'espressione proposta da Compton convinse definitivamente la comunità dei fisici della validità del modello corpuscolare della luce proposto da Einstein.

Il problema

Dobbiamo premettere un'osservazione: il testo della prova prescrive che il candidato “presti particolare attenzione al corretto uso delle cifre significative nella presentazione dei risultati numerici.” Tutto bene, se poi la prova stessa non fornisse la maggior parte dei dati con una sola cifra significativa. Il candidato sarebbe allora costretto a fare altrettanto, e i risultati perderebbero spesso significato. Non possiamo fare a meno di interrogarci sulla ragione di un modo di procedere così palesemente incoerente. Nel seguito indichiamo tutti i risultati con tre cifre significative.

Con i dati forniti, la variazione di lunghezza d'onda del fotone risulta:

$$\Delta\lambda = \lambda_C (1 - \cos\theta) = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ m} (1 - \cos 30^\circ) = 3,26 \cdot 10^{-13} \text{ m}. \quad (5)$$

La lunghezza d'onda del fotone incidente vale:

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{E} &= \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{0,1 \text{ MeV}} = \\ &= \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,60 \cdot 10^{-14} \text{ J}} = 1,24 \cdot 10^{-11} \text{ m}. \end{aligned} \quad (6)$$

(Come si vede, la variazione di lunghezza d'onda cade sulla terza cifra significativa.)

La lunghezza d'onda del fotone diffuso risulta allora:

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = 1,24 \cdot 10^{-11} \text{ m} + 3,26 \cdot 10^{-13} \text{ m} = 1,27 \cdot 10^{-11} \text{ m} \quad (7)$$

e l'energia corrispondente vale:

$$E' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,27 \cdot 10^{-11} \text{ m}} = 1,57 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 0,0979 \text{ MeV}. \quad (8)$$

L'energia del fotone diffuso è minore di quella del fotone incidente, perché parte dell'energia di quest'ultimo si è trasferita come energia cinetica all'elettrone.

Vale la pena di notare che, se si fosse lavorato con una sola cifra significativa come i dati forniti avrebbero reso necessario, l'energia del fotone diffuso sarebbe risultata indistinguibile da quella del fotone incidente.

Secondo tema

Il campo $\vec{B}$

Si vedano le osservazioni sulle cifre significative relative al tema precedente.

L'espressione del modulo del campo magnetico (termine ormai largamente preferito a quello di induzione magnetica) generato in un punto a distanza r da un conduttore rettilineo percorso da una corrente di intensità i è:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r}. \quad (9)$$

In questo caso i fili sono due, il filo M passante per P e il filo N passante per Q. Il campo magnetico in ogni punto dello spazio è dunque la somma vettoriale dei due campi. La direzione e il verso di ciascun campo si può trovare con la regola della mano destra, come indicato nella figura (2), dove le linee del campo generato da M sono indicate con linee tratteggiate e quelle del campo generato da N con linee punteggiate. Non si è fatto alcun tentativo di ricostruire le linee del campo risultante, un obiettivo che non sembra alla portata di un candidato durante la prova d'Esame.

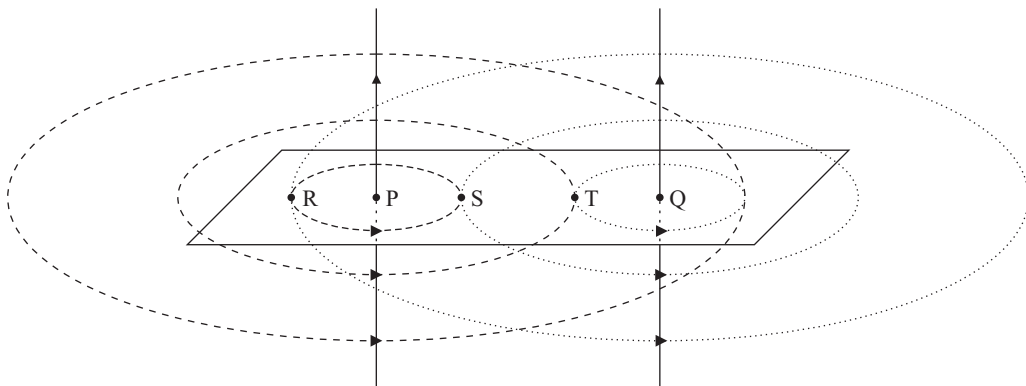


Figura 2: Linee di forza

Tutti i punti oggetto d'indagine si trovano sulla retta PQ, e in essi entrambi i campi sono sempre perpendicolari alla retta stessa. La somma vettoriale si riduce così a una somma algebrica.

Determiniamo in primo luogo il modulo dei singoli campi nei punti indicati. Per il filo M:

$$B_M(R) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \frac{1\text{A}}{0,03\text{m}} = 6,67 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} = 6,67 \mu\text{T} \quad (10)$$

$$B_M(S) = 6,67 \mu\text{T} \quad (11)$$

$$B_M(T) = 2,86 \mu\text{T} \quad (12)$$

e per il filo N:

$$B_N(R) = 1,54 \mu\text{T} \quad (13)$$

$$B_N(S) = 2,86 \mu\text{T} \quad (14)$$

$$B_N(T) = 6,67 \mu\text{T}. \quad (15)$$

Nel punto R i due campi hanno lo stesso verso e il modulo del campo risultante è la somma dei moduli, $B(R) = 8,21 \mu\text{T}$. In S e in T i campi sono opposti e il modulo del campo risultante è la differenza dei moduli, $B(S) = B(T) = 3,81 \mu\text{T}$. Nella figura (3) sono rappresentati i tre vettori risultanti.

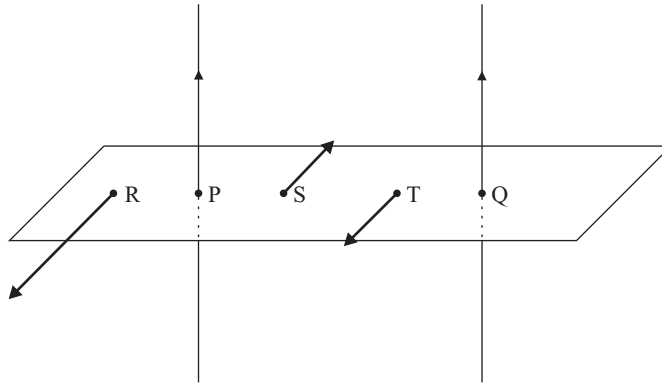


Figura 3: Vettori risultanti

Tra i punti P e Q i due campi hanno sempre verso opposto, come si è visto, quindi il modulo del campo risultante è la differenza dei moduli e si può scrivere in forma generale, per un punto a distanza x da P:

$$B(x) = \left| \frac{\mu_0 i}{2\pi x} - \frac{\mu_0 i}{2\pi (l-x)} \right| = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{l-x} \right| = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{|l-2x|}{x(l-x)} \quad (16)$$

dove si è detta l la distanza PQ.

Piuttosto che studiare $B(x)$, sembra più interessante studiare $B_{sign}(x)$, definito a meno del valore assoluto, che descrive l'andamento del campo risultante tenendo conto anche del verso (considerato positivo quando $\vec{B}(x)$ punta lontano dal lettore). A meno di costanti irrilevanti, $B_{sign}(x)$ coincide con la funzione:

$$B_{sign}(x) = \frac{1-2x}{x(1-x)} \text{ per } 0 < x < 1. \quad (17)$$

Il grafico di $B_{sign}(x)$ è riportato in figura (4). Il grafico di $B(x)$ si può ottenere facilmente da questo.

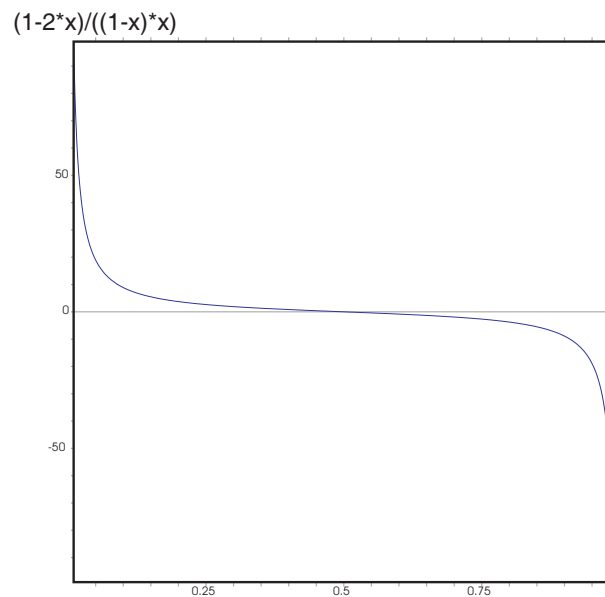


Figura 4: Grafico di $B_{sign}(x)$

La traiettoria dei protoni

Il protone passante per S subisce una forza di Lorentz che, per la seconda regola della mano destra, è diretta verso il filo M ed è perpendicolare a $\vec{v}$ e a $\vec{B}$. Se B fosse costante, la traiettoria sarebbe una circonferenza. Poiché B cresce quando il protone devia verso il filo, anche la forza di Lorentz cresce e la traiettoria è una curva con un raggio di curvatura sempre più piccolo. Nel contempo, però, il centro della circonferenza alla quale è istantaneamente tangente la traiettoria si sposta verso la traiettoria stessa. Ne risulta una curva tutt'altro che facile da visualizzare con una certa precisione.

La figura (5) rappresenta la situazione “iniziale”, quando il protone si trova nel punto S: situazione

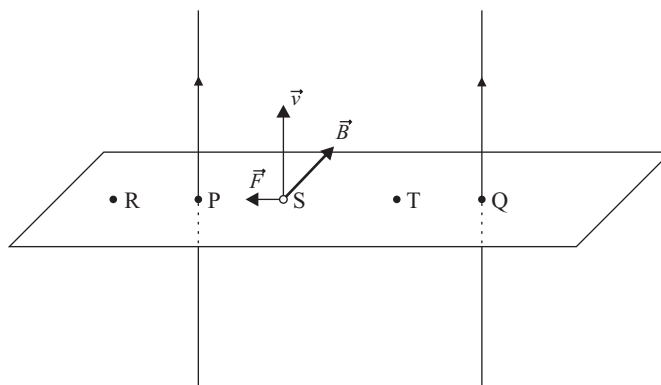


Figura 5: Forza di Lorentz

nella quale il modulo della forza di Lorentz vale:

$$F = qvB = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C} \cdot 2 \cdot 10^4 \text{m/s} \cdot 3,81 \cdot 10^{-6} \text{T} = 1,2 \cdot 10^{-20} \text{N}. \quad (18)$$

Una ricostruzione attendibile della traiettoria richiede strumenti non banali, e non è chiaro come potesse essere raggiunta in sede d'esame. È vero che il testo parla di tracciare un disegno “in maniera approssimata”; ma c'è una grossa differenza fra approssimare e tirare a indovinare, come è possibile che molti studenti siano stati tentati di fare.

Un'integrazione numerica conduce alla traiettoria riportata in figura (6), dove l'asse x coincide con la retta PQ e l'asse y con il filo M.

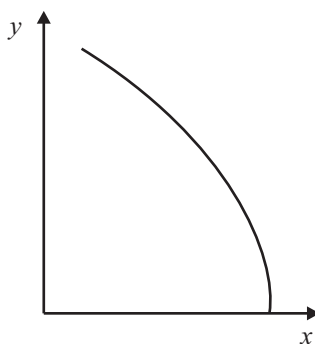


Figura 6: Traiettoria del protone passante per S

La traiettoria del protone passante per T sarà simmetrica a questa, rispetto all'asse del segmento PQ, nel piano individuato dai due fili.