Su un notevole risultato ottenuto da Galileo in relazione ai moti uniformemente accelerati

Stefano Ranfone *

In questa breve *Nota* vogliamo dimostrare un notevole risultato ottenuto da Galileo all'inizio del '600, relativo ai moti uniformemente accelerati. Dimostreremo infatti che un punto materiale soggetto a tale moto percorre in intervalli di tempo uguali spazi che sono *multipli dispari* dello spazio percorso nel primo intervallo[1] . Galileo verificò sperimentalmente questo risultato costruendo un opportuno piano inclinato sul quale piazzò un certo numero di campanelli; allo scopo di udire il suono dei campanelli ad intervalli di tempo uguali dovette fissare questi campanelli (il cui suono segnalava il passaggio del corpo che scendeva lungo il piano inclinato stesso) ad opportune distanza tra loro, che egli mostrò essere, appunto, multipli dispari della distanza tra la sommità del piano (punto di partenza, da fermo, del corpo) ed il primo campanello.

Per la nostra dimostrazione supporremo quindi che il piano inclinato, lungo l, sia inclinato rispetto al piano orizzontale di un angolo α, cosicché, trascurando qualsiasi forza di attrito, possiamo dire che l'accelerazione caratteristica del moto lungo tale piano è semplicemente $a = g \sin\alpha$, essendo $g = 9.8\ m/s^2$ l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre. Supponendo che il corpo venga lasciato scivolare dalla sommità del piano con velocità iniziale nulla ($v_0 = 0$), il tempo totale T necessario per l'intera discesa può essere ottenuto facilmente come segue, utilizzando la ben nota legge oraria del *moto uniformemente accelerato*:

$$l = \frac{1}{2}\, a\, T^2 \qquad \Rightarrow \qquad T = \sqrt{\frac{2\, l}{a}}\,.$$

Dividendo questo tempo per il numero N dei *campanelli* troviamo quindi che l'intervallo di tempo che intercorre tra il suono di ciascun campanello ed il successivo è dato da:

$$\tau = \frac{T}{N} = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{2\, l}{a}}\,.$$

Lo spazio percorso tra il punto di partenza alla sommità del piano inclinato ed il primo campanello è allora:

$$l_1 = \frac{1}{2}\, a\, \tau^2 = \frac{1}{2}\, a\, \frac{1}{N^2}\, \frac{2\, l}{a} = \frac{l}{N^2}\,,$$

al termine del quale la velocità raggiunta sarà:

$$v_1 = a\, \tau = a\, \frac{1}{N}\sqrt{\frac{2\, l}{a}} = \frac{1}{N}\sqrt{2\, a\, l}\,.$$

*ITIS Marconi, Pontedera (PI); email: sranfone@alice.it; url: www.stefano-ranfone.it

[1] Leonardo da Vinci aveva invece, erroneamente, trovato le distanze percorse (da un grave in caduta libera) come proporzionali ai *numeri interi*.

Quindi, procedendo, lo spazio percorso nel successivo intervallo di tempo τ sarà:

$$l_2 = v_1\,\tau + \frac{1}{2}\,a\tau^2 = a\tau^2 + \frac{1}{2}\,a\tau^2 = \frac{3}{2}\,a\tau^2 = 3\,l_1\,,$$

al termine del quale avrà una velocità:

$$v_2 = v_1 + a\,\tau = 2a\tau\,.$$

Tra il secondo e il terzo campanello lo spazio percorso risulta pertanto essere dato dalla seguente formula:

$$l_3 = v_2\,\tau + \frac{1}{2}\,a\tau^2 = 2a\tau^2 + \frac{1}{2}\,a\tau^2 = \frac{5}{2}\,a\tau^2 = 5\,l_1\,,$$

quando viene raggiunta la velocità:

$$v_3 = v_2 + a\,\tau = 3\,a\tau\,.$$

Analogamente, lo spazio percorso tra il terzo ed il quarto campanello, l_4, sarà quindi:

$$l_4 = v_3\,\tau + \frac{1}{2}\,a\tau^2 = 3\,a\tau^2 + \frac{1}{2}\,a\tau^2 = \frac{7}{2}\,a\tau^2 = 7\,l_1\,,$$

e così via, fino all'ultima porzione di percorso, tra il penultimo ($N-1$-esimo) e l'ultimo (l'N-esimo) campanello:

$$\begin{aligned} l_N &= v_{N-1}\,\tau + \tfrac{1}{2}\,a\tau^2 = (N-1)\,a\tau^2 + \tfrac{1}{2}\,a\tau^2 = \\ &= (N-\tfrac{1}{2})\,a\tau^2 = (N-\tfrac{1}{2})\,2\,l_1 = (2N-1)\,l_1\,. \end{aligned}$$

Questi risultati dimostrano quanto voluto, ovvero che gli N spazi percorsi (e quindi le N distanze a cui vanno piazzati gli N campanelli per udire i loro suoni ad intervalli di tempo uguali) sono *multipli dispari* del primo spazio (cioè la distanza tra il punto di partenza alla sommità del piano inclinato ed il primo campanello):

$$\begin{cases} l_1 = l/N^2\,, \\ l_2 = 3\,l_1\,, \\ l_3 = 5\,l_1\,, \\ \vdots \\ l_k = (2k-1)\,l_1\,, \\ \vdots \\ l_N = (2N-1)\,l_1\,. \end{cases}$$

Naturalmente la somma di tutti questi spazi deve essere uguale alla totale lunghezza del piano inclinato l. Ed in effetti si trova:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} l_k &= l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_N = \\
&= \tfrac{l}{N^2} + 3 \cdot \tfrac{l}{N^2} + 5 \cdot \tfrac{l}{N^2} + \ldots + (2N-1)\tfrac{l}{N^2} = \\
&= \frac{l}{N^2} \sum_{k=1}^{N} (2k-1) = \frac{l}{N^2}\,[1 + 3 + 5 + \ldots + (2N-1)] = \\
&= \tfrac{l}{N^2} \cdot N^2 = l\,,
\end{aligned}
$$

come c'era da aspettarsi, e dove si è usato il fatto che la somma dei primi N *numeri dispari* è proprio uguale a N^2.

Il notevole risultato qui dimostrato fu ottenuto (e verificato *sperimentalmente*) dallo stesso Galileo durante i suoi studi sui *moti uniformemente accelerati*.