

Appunti sul Moto dei corpi in un Campo Gravitazionale

Stefano Ranfone *

Keywords: Gravitazione, Moto dei Corpi Celesti, Leggi di Keplero.

Questi *Appunti* si possono considerare un “*Approfondimento*”, o se vogliamo un *completamento*, di quanto esposto nei nostri “*Complementi di Fisica*” [1], a proposito dello studio del moto che può avere un corpo P (di massa m) immerso nel campo gravitazionale di un corpo molto più massiccio di massa M ($\gg m$), fisso nell’origine O delle coordinate. In effetti, allo scopo di facilitare il lettore (*studente*), riprodurremo qui gli stessi risultati già ottenuti nel §2.9 di [1], ma fornendo molti dettagli in più dei calcoli effettuati.

La posizione del corpo P è descritta, istante per istante, dal raggio vettore $\vec{OP}(t) \equiv \mathbf{r}(t)$. La forza alla quale è soggetto P è quella *Gravitazionale* di Newton:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r) \hat{\mathbf{r}} = -\frac{G_N M m}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (1)$$

Trattandosi di una forza centrale, il suo *Momento torcente* rispetto a O risulta essere nullo:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{r} \wedge \hat{\mathbf{r}} F(r) = \mathbf{0}, \quad (2)$$

per cui, in virtù della *Seconda Equazione Cardinale della Dinamica*, si conserva il “Momento Angolare”: $\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{L}_O = \text{cost}$. Conseguenza diretta di questa conservazione è che le traiettorie che si possono ottenere sono sempre necessariamente *piane*. Ciò ci autorizza ad impiegare semplici coordinate polari piane (r, ϕ) per descrivere la posizione del corpo P :

$$\begin{cases} x = r \cos \phi, \\ y = r \sin \phi, \end{cases} \quad (3)$$

ovvero:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \phi = \arctan \frac{y}{x}. \end{cases} \quad (4)$$

In tali coordinate il raggio vettore che descrive la posizione di P si può scrivere:

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}}x + \hat{\mathbf{j}}y = r(\hat{\mathbf{i}} \cos \phi + \hat{\mathbf{j}} \sin \phi) \equiv r \hat{\mathbf{r}}, \quad (5)$$

*email: sranfone@alice.it ; www.stefano-ranfone.it

mentre la sua velocità, ottenibile derivando l'eq.(5) rispetto al tempo, può essere espressa come somma della sua componente *radiale* e di quella *tangenziale*:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\hat{\mathbf{r}}} = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\phi} \hat{\phi}, \quad (6)$$

dove $\hat{\mathbf{r}}$ è il *versore radiale* ($\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$) e $\hat{\phi}$ è il *versore "tangenziale"*:

$$\hat{\phi} = -\hat{\mathbf{i}} \sin \phi + \hat{\mathbf{j}} \cos \phi. \quad (7)$$

Il quadrato della velocità è quindi dato da:

$$v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2, \quad (8)$$

e l'energia cinetica del corpo P di massa m è perciò:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\phi}^2. \quad (9)$$

Il *Momento angolare* (che si conserva) è allora dato da:

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \wedge m \mathbf{v} = m r \hat{\mathbf{r}} \wedge (\dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\phi} \hat{\phi}) = m r^2 \dot{\phi} \hat{\mathbf{r}} \wedge \hat{\phi} \equiv m r^2 \dot{\phi} \hat{\mathbf{k}} \equiv L_O \hat{\mathbf{k}}, \quad (10)$$

dove $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{r}} \wedge \hat{\phi}$ è il versore diretto lungo l'asse z , perpendicolare al piano (x, y) in cui avviene il moto, e dove si è posto:

$$L_O = m r^2 \dot{\phi} = \text{cost.} \quad (11)$$

Questa formula ci permette di esprimere la velocità angolare $\dot{\phi}$ in funzione della sola distanza r di P dal centro O :

$$\dot{\phi} = \frac{L_O}{m r^2}, \quad (12)$$

dalla quale si evince che nel caso di orbite limitate, per esempio ellittiche, il corpo P assume velocità maggiori al *perielio* (punto di minima distanza da O) e minori all'*afelio* (punto di massima distanza da O). Questo risultato è associabile alla cosiddetta "*Seconda Legge di Keplero*" (detta anche "*Legge delle Aree*"), che può infatti essere dedotta direttamente dalla (12). Secondo tale legge, un corpo in moto in un qualsiasi campo di forze centrali (*i.e.*, $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r) \hat{\mathbf{r}}$) *percorre la sua traiettoria attraversando aree uguali in tempi uguali*. Ciò è equivalente a dire che la velocità con cui varia l'area "*spazzata*" dal raggio vettore \mathbf{r} durante il moto è costante. Infatti, considerato un tempo infinitesimo dt , in cui l'angolo polare ϕ varia di $d\phi$ ed il punto materiale P percorre un tratto di traiettoria $dl = r d\phi$, l'area *sottesa* (rispetto al centro O) è essenzialmente quella di un triangolo isoscele di lato r e base dl , data da: $dA = \frac{1}{2} r dl = \frac{1}{2} r^2 d\phi$. La *velocità areolare* che si ottiene è quindi data da:

$$\dot{A} \equiv \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi} = \frac{1}{2} r^2 \frac{L_O}{m r^2} = \frac{L_O}{2m}, \quad (13)$$

ed è quindi costante in virtù della (11).

Sostituendo l'eq.(12) nell'espressione dell'energia cinetica data nella (9), e aggiungendo a questa l'energia potenziale gravitazionale, data dalla:

$$U(r) = -\frac{G_N M m}{r}, \quad (14)$$

si ottiene l'energia (meccanica) totale, che deve pure conservarsi, in virtù della *conservatività* del sistema (ovvero, del fatto che l'unica forza che compie lavoro è quella gravitazionale, che è *conservativa*):

$$\begin{aligned} E = T + U &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2 \left(\frac{L_O}{mr^2} \right)^2 + U(r) = \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left[\frac{L_O^2}{2mr^2} - \frac{G_N M m}{r} \right] = \text{cost.}, \end{aligned} \quad (15)$$

dove il termine racchiuso tra parentesi *quadre* è detto “Energia Potenziale *efficace*”:

$$U_{eff}(r) = \frac{L_O^2}{2mr^2} - \frac{G_N M m}{r} \equiv \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r}, \quad (16)$$

dove si è posto, per semplificare i calcoli algebrici che dovremo fare in seguito:

$$A = \frac{L_O^2}{2m}, \quad B = G_N M m. \quad (17)$$

Il grafico di questa funzione $U_{eff}(r)$ è rappresentato in *Fig.1*. Il primo termine in U_{eff} è detto “barriera centrifuga”, e corrisponde a tutti gli effetti ad una forza *repulsiva*, il secondo è invece l'ordinaria Energia Potenziale Gravitazionale data nell'eq.(14). Anche se in realtà il moto di P è *piano*, lo studio di $U_{eff}(r)$ è sufficiente a descrivere, al variare dell'energia totale E , i vari tipi di moti possibili per quanto riguarda la coordinata radiale r , e quindi la distanza di P dal corpo centrale di massa M in quiete nell'origine delle coordinate.

Come nel caso dei semplici moti unidimensionali, le regioni (in r) permesse al moto sono solo quelle per cui $E \geq U_{eff}$ (essendo necessariamente $T_r \equiv \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$), ed i valori di r per i quali $E = U_{eff}$ (ove $\dot{r} = 0$) sono detti “*punti di inversione*” del moto. Si possono avere pertanto i seguenti casi:

- $E > 0$: in questo caso, essendo l'energia totale maggiore di zero, vediamo dalla *Fig. 1* che il moto risulta essere illimitato, e più precisamente “*iperbolico*”. L'unico punto di inversione corrisponde alla minima distanza di P dal centro O , ed è ottenibile risolvendo l'equazione $E = U_{eff}$; si trova così:

$$\frac{A}{r^2} - \frac{B}{r} = E \quad \Rightarrow \quad Er^2 + Br - A = 0, \quad (18)$$

la cui unica soluzione accettabile (cioè *positiva*) è la seguente:

$$r_{min} = \sqrt{\left(\frac{B}{2E} \right)^2 + \frac{A}{E}} - \frac{B}{2E} = \sqrt{\left(\frac{G_N M m}{2E} \right)^2 + \frac{L_O^2}{2mE}} - \frac{G_N M m}{2E}, \quad (\text{moto iperbolico}). \quad (19)$$

- $E = 0$: questo è una situazione particolare, che corrisponde ad avere una velocità radiale nulla all'infinito ($\lim_{r \rightarrow \infty} \dot{r} = 0$). L'orbita è ancora illimitata, ma “*parabolica*”, e la distanza minima (corrispondente al

vertice della parabola) da O può essere ottenuta ponendo $E = 0$ nell'eq.(18); il risultato che si trova è il seguente:

$$r_{min} = \frac{A}{B} = \frac{L_O^2}{2G_N M m^2}, \quad (\text{moto parabolico}). \quad (20)$$

- $U_{min} < E < 0$: questo è forse il caso più interessante, perché corrisponde al moto dei pianeti nel campo gravitazionale del Sole; le traiettorie sono limitate, e più precisamente “ellittiche”, con due punti di inversione a cui corrispondono il *perielio* (r_{min}) e l'*afelio* (r_{max}), che si possono determinare risolvendo ancora l'eq.(18), ma con $E = -|E|$; i risultati che si ottengono sono dati dalle seguenti formule:

$$\begin{cases} r_{min} = \frac{B}{2|E|} - \sqrt{\left(\frac{B}{2|E|}\right)^2 - \frac{A}{|E|}} = \frac{G_N M m}{2|E|} - \sqrt{\left(\frac{G_N M m}{2|E|}\right)^2 - \frac{L_O^2}{2m|E|}}, & (\text{moto ellittico}), \\ r_{max} = \frac{B}{2|E|} + \sqrt{\left(\frac{B}{2|E|}\right)^2 - \frac{A}{|E|}} = \frac{G_N M m}{2|E|} + \sqrt{\left(\frac{G_N M m}{2|E|}\right)^2 - \frac{L_O^2}{2m|E|}}, & (\text{moto ellittico}). \end{cases} \quad (21)$$

Da queste si possono quindi determinare sia il semiasse maggiore a dell'ellisse che la distanza c dei suoi fuochi dal centro O :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}(r_{max} + r_{min}) = \frac{B}{2|E|} = \frac{G_N M m}{2|E|}, \\ c = \frac{1}{2}(r_{max} - r_{min}) = \sqrt{\left(\frac{B}{2|E|}\right)^2 - \frac{A}{|E|}}. \end{cases} \quad (22)$$

Infine, il semiasse minore b può essere calcolato dalla formula: $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, mentre per l'*eccentricità* e si può utilizzare la sua stessa definizione:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}} = \sqrt{1 - \frac{4A|E|}{B^2}} = \sqrt{1 - \frac{2L_O^2|E|}{G_N^2 M^2 m^3}}. \quad (23)$$

- $E = U_{min}$: in quest'ultimo caso risulta esserci un solo valore permesso per la coordinata radiale r , valore in corrispondenza del quale l'Energia Potenziale Efficace assume il suo valore minimo; il moto risulta pertanto essere “circolare”, e per determinarne il raggio r_c dobbiamo quindi trovare per quale valore di r la derivata della funzione $U_{eff}(r)$ data nella (16) è nulla; si trova:

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{A}{r^2} - \frac{B}{r} \right) = -\frac{2A}{r^3} + \frac{B}{r^2} = 0, \quad (24)$$

da cui:

$$r_c = \frac{2A}{B} = \frac{L_O^2}{G_N M m^2}, \quad (\text{moto circolare}). \quad (25)$$

L'energia E , pari al minimo di U_{eff} , è pertanto:

$$E = U_{min} \equiv U_{eff}(r = r_c) = \frac{A}{r_c^2} - \frac{B}{r_c} = -\frac{B^2}{4A} = -\frac{G_N^2 M^2 m^3}{2L_O^2}. \quad (26)$$

Come abbiamo visto, al variare dell'energia E del sistema, possiamo dedurre i vari tipi di traiettorie (piane) possibili, semplicemente studiando il comportamento dell'Energia Potenziale efficace U_{eff} in funzione della distanza dal centro O . Tutte le traiettorie risultano essere *sezioni coniche*: traiettorie *iperboliche* per energie $E > 0$, *paraboliche* nel caso particolare in cui $E = 0$, *ellittiche* per energie negative ($E < 0$) ma maggiori del valor minimo di U_{eff} , ed infine *circolari* se l'energia risulta avere proprio tale valore: $E = U_{min}$.

Riferimenti bibliografici

- [1] Stefano Ranfone, *Complementi di Fisica*, Pisa, ETS, 2016.

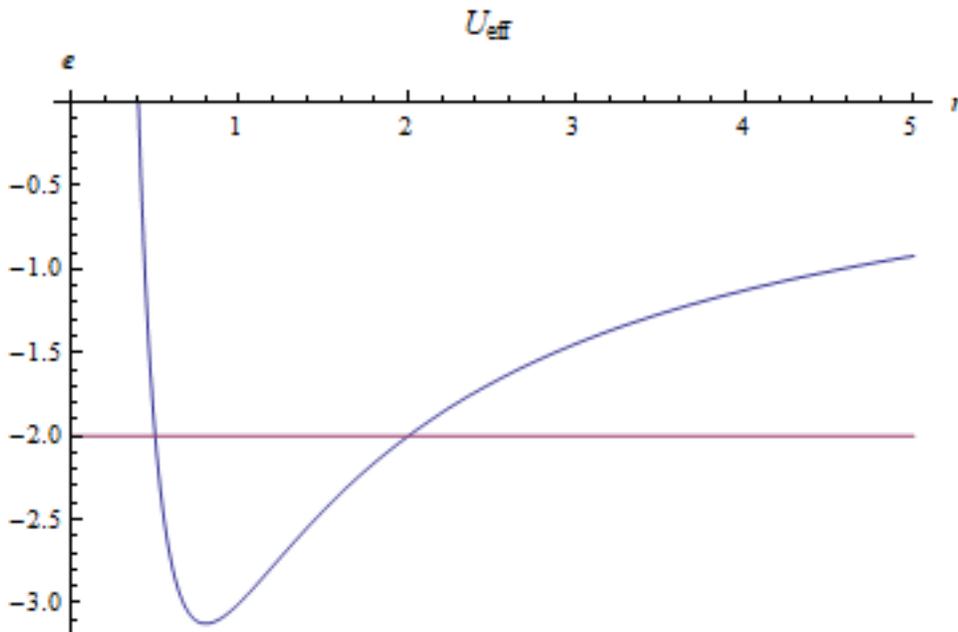


Fig. 1 [Energia Potenziale Efficace $U_{eff}(r)$ e sua intersezione con la retta $E = \text{cost.}$ (< 0), per la determinazione del *perielio* (r_{min}) e dell'*afelio* (r_{max}) nel caso di orbite ellittiche.]