

Alcune considerazioni su un modello del XVII secolo di Orbita Eccentrica della Terra vs. Orbita Ellittica Kepleriana

Stefano Ranfone *

Abstract

Keywords: Fisica, Astronomia, Orbite “eccentriche”, Keplero, Orbite Ellittiche.

In questo articolo vogliamo discutere alcuni aspetti di un modello elio-“eccentrico” per l’orbita della Terra, ancora accettato da alcuni astronomi del XVII secolo per “salvare i fenomeni”, confrontandolo con quello di Keplero con orbite ellittiche. In particolare, viene mostrato che in effetti tale modello poteva rendere conto delle osservazioni della diversa distanza tra Terra e Sole che si verifica durante l’anno, come pure della variazione della velocità angolare del moto apparente del Sole, a meno di aver potuto effettuare misurazioni in proposito con un margine di errore non superiore all’1%.

[In this paper we discuss some aspects of an “eccentric” model for the Earth’s orbit around the Sun, a model that was still accepted in the XVII century by some astronomers in order to “save the phenomena”. By comparing such a model with the elliptical orbits of Kepler, we show that actually it could have been able to take into account the observations of a variable distance between Earth and Sun during the year, as well as the non-uniformity of the apparent motion of the latter, unless the measurements could have achieved an accuracy of about 1%.]

1 Introduzione

Fin dall’Antichità era un fatto ben noto che la distanza del Sole dalla Terra non fosse costante, ma mutasse con regolarità durante l’anno. Dalle osservazioni risultava infatti che il diametro *apparente* del disco solare variava da un minimo che in prima approssimazione¹ veniva osservato in concomitanza del solstizio d’estate, ad un massimo sei mesi più tardi, attorno al solstizio d’inverno, chiaro segno della variazione della loro distanza. Oggi sappiamo che ciò è una diretta conseguenza della natura ellittica dell’orbita terrestre attorno al Sole. La diversa distanza tra Terra e Sole implica inoltre, in virtù della Seconda Legge di Keplero², che la Terra (come ogni altro pianeta) sia caratterizzata da una velocità maggiore quando è più vicina al Sole, e sia invece più lenta quando ne è più lontana. Anche per questo motivo la durata dell’estate è un po’ più lunga di quella dell’inverno.

Oggi è un fatto ben noto, non solo a fisici o astronomi, che i pianeti percorrono orbite ellittiche³ attorno al Sole, nelle quali questo occupa uno dei due fuochi. Questo fatto, fu dedotto da Keplero [3] all’inizio del XVII secolo, sfruttando i dati accumulati in secoli di osservazioni astronomiche, senza tuttavia riuscire a darne né una giustificazione “fisica”, né una dimostrazione “matematica”. Queste furono ottenute solo circa mezzo secolo più tardi da Newton, che le incluse nei suoi “Principia” [4]. Ricordiamo che nel Modello eliocentrico originale

*email: sranfone@alice.it ; www.stefano-ranfone.it

¹Qui trascureremo il piccolo angolo che in realtà è non-nullo tra la direzione del solstizio d’estate e l’afelio dell’orbita terrestre, ovviamente lo stesso angolo che c’è tra il perielio e il solstizio invernale; in effetti sappiamo che il punto di minima distanza tra Sole e Terra (per l’appunto il perielio) cade circa un paio di settimane dopo il Solstizio invernale, nella prima settimana di Gennaio.

²Detta anche *Legge delle Aree*, espressione della *Conservazione del Momento Angolare* per i moti planetari.

³Per scopi essenzialmente didattici, nell’Appendice §5, anche a completamento di quanto da noi già esposto in [1] e in [2], dimostreremo che in effetti le orbite dei pianeti attorno al Sole sono di tipo ellittico.

di Copernico proposto oltre un secolo prima [5] nel suo “*De Revolutionibus Orbium Coelestium*”, le orbite dei pianeti erano state ancora ipotizzate tutte circolari. Secondo la filosofia platonico-aristotelica, infatti, la natura *circolare* delle orbite, accompagnata dall’assunto che queste fossero necessariamente percorse con moto uniforme (al tempo detto “*motus aequabilis*”), costituiva uno dei principi cardine di tutta la cosmologia, caratteristica che non fu mai messa in discussione almeno fino a Keplero e all’avvento della Rivoluzione Scientifica del XVII secolo. Non c’è quindi da sorprendersi se da parte di alcuni filosofi, ancora nella seconda metà del ’600, si incontrassero delle resistenze ad abbandonare l’ipotesi di orbite circolari, ed accettare quelle ellittiche di Keplero-Newton. Ciò viene testimoniato anche da uno dei primi promotori della nuova filosofia newtoniana, lo scozzese John Keill⁴, di cui abbiamo già parlato in un nostro precedente articolo [6]. Questo autore, che ebbe il merito di introdurre con le sue *Lectures* i “*Principia*” di Newton nella sua Università, ad Oxford, nella sua importante opera dedicata all’Astronomia [7] (a pag. 82) scrive infatti che: “*We are also assured by the Observations of Astronomers, that the Apparent Diameter of the Sun in Winter, when the Motion of the Sun is quickest, is greater than the Apparent Diameter in the Summer, when he slackens his pace; and the Difference is so great, that when the Sun appears biggest, he is seen under an Angle of 32 Minutes 47 Seconds; but when he appears least, he subtends an Angle only of 31 Minutes and 40 Seconds, and therefore the Sun must be farther from us in Summer than in Winter. Some Astronomers too pertinaciously keeping to Circular Orbits, that they might give a Satisfactory account of these Appearances, supposed that the Earth did really move with an equable Motion in the Periphery of a Circle, and that if it were seen from the Center of that Circle, it would be observed to describe equal Angles round it; but they supposed the Sun to be removed from the Center at some distance*”. In un certo senso, il modello a cui fa qui riferimento il Keill potrebbe definirsi “speculare” di quello ipotizzato da Ipparco⁵, nel quale è il Sole a muoversi uniformemente su un’orbita circolare attorno ad un centro fisso O , con la Terra che occupa una posizione decentrata (da cui il nome di *eccentrico*) ad una certa distanza d da tale centro. Questo è in effetti proprio il modello descritto dallo scienziato scozzese nel suo testo, con i ruoli di Terra e Sole invertiti. Qui noi vogliamo investigare a che livello di approssimazione tale modello era in grado di riprodurre i risultati *corretti*, come ipotizzato dai suoi fautori, ovvero “*give a Satisfactory account of the Appearances*”, che in Italiano si usava tradurre come “*salvare le apparenze*” (o i *fenomeni*). In altre parole, vogliamo verificare fino a che punto questo modello, che potremmo definire “*elio-eccentrico*”, è in grado di riprodurre risultati simili a quelli ottenibili nel contesto delle orbite ellittiche di Keplero, almeno per quanto riguarda la variazione della velocità angolare del moto apparente del Sole. Confronteremo questi risultati anche col modello ad orbite circolari di Copernico, che è chiaramente incompatibile sia con le osservazioni di una distanza variabile tra Sole e Terra che con una velocità non uniforme del moto apparente del Sole.

Prima di affrontare il problema del calcolo della velocità angolare del moto orbitale della Terra nei due modelli che ci interessano, quello “*elio-eccentrico*” e quello delle orbite ellittiche di Keplero, vediamo come dalla semplice osservazione del diverso diametro angolare del Sole osservato dalla Terra, può essere dedotta l’eccentricità dell’orbita di quest’ultima. Facendo riferimento alla Fig. 1, sia T la Terra, $ED = BC = 2 R_{\odot}$ il diametro (reale) del Sole, $TP = D_{per}$ la distanza tra Terra e Sole al *perielio* (punto di distanza minima), e $TA = D_{afe}$ quella all’*afelio* (punto di distanza massima). Il diametro angolare *apparente* del Sole all’afelio è quindi il doppio dell’angolo α , mentre quello osservato al perielio è il doppio dell’angolo β . Utilizzando i dati forniti dallo stesso Keill nel suo testo [7] possiamo allora scrivere che: $2\alpha = 31' 40'' = \frac{31.667}{60} \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 9.211 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$, mentre: $2\beta = 32' 47'' = \frac{32.783}{60} \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 9.536 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$. Dalla Fig. 1 si evince inoltre che: $R_{\odot} = D_{per} \tan \beta = D_{afe} \tan \alpha$, per cui, tenendo anche conto che entrambi gli angoli sono molto piccoli, si ha: $D_{per} = R_{\odot}/\beta$ e $D_{afe} = R_{\odot}/\alpha$. Da questi risultati possiamo dedurre, assumendo per il momento orbite ellittiche, che il *semiasse maggiore* a e il parametro c (la distanza tra il fuoco dove è posto il Sole e il centro dell’ellisse stesso) sono dati rispettivamente da:

$$a = \frac{D_{afe} + D_{per}}{2} = \frac{1}{2} R_{\odot} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right), \quad c = \frac{D_{afe} - D_{per}}{2} = \frac{1}{2} R_{\odot} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right), \quad (1)$$

⁴John Keill (Edimburgo, 1° dicembre 1671 – Oxford, 31 agosto 1721) è stato un matematico scozzese discepolo di Isaac Newton.

⁵Ipparco di Nicea (c. 190 B.C. - c. 120 B.C.), considerato il più grande astronomo dell’Antichità, fu anche lo scopritore della *Precessione degli Equinozi*. Per maggiori dettagli sul suo modello *geo-“eccentrico”* si veda, per esempio, la breve descrizione che ne dà Pedersen in [8].

per cui l'eccentricità e dell'orbita risulta essere⁶:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{D_{afe} - D_{per}}{D_{afe} + D_{per}} = \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} = \frac{32.783 - 31.667}{32.783 + 31.667} \simeq 0.0173. \quad (2)$$

2 La Velocità Angolare del Moto Orbitale Terrestre nel Modello delle Orbite Ellittiche di Keplero

Iniziamo con il calcolo della velocità angolare del raggio vettore che unisce Sole e Terra in funzione dell'angolo polare, nel contesto delle “corrette” orbite ellittiche di Keplero.

La forza tra Sole e Terra data dalla Gravitazione Universale di Newton può essere espressa dalla seguente formula:

$$\mathbf{F}_G(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (3)$$

dove M ed m sono le rispettive masse, r è la loro distanza (cioè il modulo del raggio-vettore Sole-Terra $\mathbf{ST} = \mathbf{r} = r \hat{\mathbf{r}}$), e G è la costante di Newton ($G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$). Trattandosi di una forza “centrale”, il suo *Momento* rispetto al Sole S è nullo:

$$M_S = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}_G = -\mathbf{r} \wedge \hat{\mathbf{r}} \frac{GMm}{r^2} = 0 = \frac{d\mathbf{L}_S}{dt}. \quad (4)$$

Ciò implica la conservazione del *Momento Angolare* $\mathbf{L}_S$, la cui diretta conseguenza è che le orbite sono sempre necessariamente piane; questo ci permette di impiegare coordinate polari piane per descrivere il moto della Terra attorno al Sole. Facendo riferimento alla Fig. 2, troviamo così che $\mathbf{L}_S$ può essere espresso come:

$$\mathbf{L}_S = \mathbf{ST} \wedge m \mathbf{v} = m \mathbf{r} \wedge (\dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\phi} \hat{\phi}) = m r^2 \dot{\phi} \hat{\mathbf{k}} = L_S \hat{\mathbf{k}} = \text{cost.}, \quad (5)$$

dove $\phi = \widehat{PST}$ è l'angolo *polare* del vettore $\mathbf{ST}$ rispetto alla direzione del perielio P , e $\hat{\mathbf{k}} (= \hat{\mathbf{r}} \wedge \hat{\phi})$ è il versore perpendicolare al piano dell'orbita. Questa formula ci permette di esprimere la velocità angolare $\dot{\phi}$ in funzione della reciproca distanza r :

$$\dot{\phi} = \frac{L_S}{m r^2}, \quad (6)$$

che in effetti non è costante, in virtù della variazione di r lungo l'orbita ellittica. Nell'*Appendice* §5 dimostreremo, utilizzando in parte anche i risultati e le formule ottenute nel nostro precedente articolo [2] sul moto dei corpi in un campo gravitazionale centrale, che in effetti la soluzione dell'equazione del moto della Terra attorno al Sole porta ad orbite ellittiche, secondo le quali la distanza r in funzione dell'angolo polare ϕ si può scrivere come:

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \phi, \quad (7)$$

ovvero:

⁶In realtà, l'eccentricità dell'orbita terrestre oggi è circa $e = 0.0167$, e nel tempo varia lentamente, passando da quasi 0 a circa 0.05 come risultato dell'attrazione gravitazionale degli altri pianeti. Nei nostri calcoli utilizzeremo il risultato dato in eq.(2) ottenuto dai dati forniti da Keill nel suo testo [7], a pag. 82.

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \phi}, \quad (8)$$

dove e è l'eccentricità dell'orbita e il parametro p è dato da:

$$p = \frac{L_S^2}{GMm^2}. \quad (9)$$

Sostituendo l'eq.(8) nella (6) si trova quindi:

$$\dot{\phi} = \frac{L_S}{m p^2} (1 + e \cos \phi)^2 = \Gamma (1 + e \cos \phi)^2, \quad (10)$$

dove si è posto, per semplicità:

$$\Gamma = \frac{G^2 M^2 m^3}{L_S^3}. \quad (11)$$

Poiché il raggio vettore **TS** che descrive il moto apparente del Sole nel cielo attorno alla Terra è semplicemente l'opposto del vettore **ST**, la velocità angolare di tale moto è evidentemente la stessa del moto della Terra, vista dal Sole, data dall'eq.(10). Questa formula ci fornisce quindi l'espressione funzionale cercata della velocità angolare del moto apparente del Sole in funzione dell'angolo polare ϕ , che, lo ripetiamo, è l'angolo tra la direzione del perielio P dell'orbita (che corrisponde quindi a $\phi = 0$) e la direzione del vettore **ST** ad un generico istante. In Fig. 4 ne mostriamo il grafico (curva “rosa”), prendendo per l'eccentricità e il valore ottenuto nell'eq.(2), congiuntamente con quello che caratterizza la stessa velocità angolare nel *Modello* basato sul moto circolare “eccentrico” della Terra attorno al Sole (curva “viola”), del quale ci occuperemo nel §3. In Fig. 4 viene anche mostrato il grafico relativo al *Modello di Copernico* (curva “verde”), nel contesto del quale, essendo le orbite circolari, la velocità angolare è necessariamente costante. Chiaramente tale modello è escluso dalle osservazioni, sia della distanza variabile tra Sole e Terra che della stessa non-uniformità del moto apparente del Sole. In accordo con la *Seconda Legge di Keplero* - la Legge delle Aree - il grafico della funzione data in eq.(10) (curva “rosa”) mostra una velocità massima in prossimità del *Perielio* ($\phi = 0$ e $\phi = 2\pi$) ed una minima all'*Afelio* ($\phi = \pi$). Come dimostreremo nel §3, tuttavia, anche il modello “eccentrico” mostra lo stesso andamento *corretto*; l'unica differenza è nell'entità delle variazioni della velocità angolare lungo l'orbita: mentre le orbite ellittiche di Keplero danno oscillazioni che arrivano a circa il 6.8%, quelle del modello *eccentrico* non superano il 3,4%. Torneremo a commentare questa differenza nelle *Conclusioni* §4.

3 La Velocità Angolare del Moto Orbitale Terrestre nel modello “Eccentrico”

Come già accennato nell'*Introduzione*, e come testimoniato anche dal Keill nella sua “*Introduction to the True Astronomy*”[7], ancora nel XVII secolo un certo numero di *Astronomi*, pur accettando il *modello Eliocentrico*, rimase però poco propenso ad abbandonare l'ipotesi di moti celesti esclusivamente circolari ed uniformi. Le loro motivazioni ed argomentazioni erano essenzialmente di natura *metafisica*, chiaramente ispirati ancora dalla vecchia filosofia *peripatetica*, che aveva dominato la visione cosmologica dell'Universo per tutto il Medioevo e fino a Copernico incluso. Essi respingevano quindi le orbite *ellittiche* di Keplero, dimostrate peraltro matematicamente dallo stesso Newton nei suoi “*Principia*” [4] proprio in quegli anni⁷. Uno dei modelli che ne risultò, come spiega il Keill in [7] a pag. 82-83, è quello *eccentrico*, per certi aspetti simile a quello di Ipparco, che potremmo definire

⁷Ma la dimostrazione risalirebbe probabilmente già all'“*annus mirabilis*” del *Divino Scienziato*, il 1666. Va in ogni caso rilevato come anche alcuni predecessori e contemporanei di Newton si fossero avvicinati alla soluzione, tra questi lo stesso Hooke.

geo-“eccentrico”, ma in cui ovviamente il ruolo della Terra e quello del Sole viene scambiato. Vediamolo in dettaglio per maggior chiarezza.

Nel Modello (elio-) *Eccentrico*, rappresentato in Fig. 3, è la Terra T che si muove attorno ad un punto fisso O su un'orbita circolare di raggio R , mentre il Sole S occupa una posizione fissa decentrata a distanza d da O .

Sempre facendo riferimento alla Fig. 3, sono quindi detti $\theta = \widehat{POT}$ l'angolo polare rispetto al centro fisso O , per il quale si assume una velocità angolare costante: $\dot{\theta} = \text{cost.}$ ($= \frac{L_O}{m R^2}$), $\phi = \widehat{PST}$ l'angolo polare del vettore $\mathbf{ST}$ (sempre rispetto alla direzione del perielio P dell'orbita) che unisce il Sole S alla Terra T , di cui vogliamo calcolare la velocità angolare $\dot{\phi}$ in funzione dello stesso angolo ϕ , proprio come abbiamo fatto in precedenza per il modello “corretto” delle orbite ellittiche di Keplero (eq.(10)), ed infine $r = |\mathbf{ST}|$ è la distanza (variabile) tra Sole e Terra. Gli assi sono presi di nuovo in modo che l'angolo $\phi = 0$ corrisponda a $\theta = 0$, in corrispondenza del *Perielio* P dell'orbita terrestre. Dalla Fig. 3 vediamo che possiamo allora scrivere che:

$$\begin{cases} R \sin \theta = r \sin \phi, \\ R \cos \theta = d + r \cos \phi, \end{cases} \quad (12)$$

mentre utilizzando il Teorema di Carnot per il triangolo OST , si ha che:

$$R^2 = d^2 + r^2 + 2 d r \cos \phi, \quad (13)$$

da cui, risolvendo rispetto a r , e dopo qualche semplice passaggio algebrico, si arriva all'unica soluzione accettabile (cioè tale che sia $r > 0$):

$$r = -d \cos \phi + \sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 \phi} = R \left(\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi} - e \cos \phi \right), \quad (14)$$

dove $e = d/R$ è l'eccentricità dell'orbita. Derivando le eq.(12) rispetto al tempo si ottiene poi:

$$\begin{cases} R \dot{\theta} \cos \theta = \dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi, \\ -R \dot{\theta} \sin \theta = \dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi, \end{cases} \quad (15)$$

dalle quali, utilizzando ancora le eq.(12), si arriva a:

$$\begin{cases} (d + r \cos \phi) \dot{\theta} = \dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi, \\ -r \dot{\theta} \sin \phi = \dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi. \end{cases} \quad (16)$$

Questo sistema di equazioni può essere convenientemente scritto in forma matriciale come segue:

$$\begin{pmatrix} \sin \phi & r \cos \phi \\ \cos \phi & -r \sin \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (d + r \cos \phi) \dot{\theta} \\ -r \dot{\theta} \sin \phi \end{pmatrix}, \quad (17)$$

da cui, invertendo la matrice a primo membro, otteniamo i seguenti risultati:

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \phi & \cos \phi \\ \frac{\cos \phi}{r} & -\frac{\sin \phi}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (d + r \cos \phi) \dot{\theta} \\ -r \dot{\theta} \sin \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \dot{\theta} \sin \phi \\ (1 + \frac{d}{r} \cos \phi) \dot{\theta} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Sostituendo nella soluzione di $\dot{\phi}$ l'espressione di r in funzione di ϕ data dall'eq.(14), si arriva così alla seguente formula:

$$\dot{\phi} = \left(1 + \frac{d}{r} \cos \phi\right) \dot{\theta} = \left(1 + \frac{e \cos \phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi - e \cos \phi}}\right) \dot{\theta}. \quad (19)$$

Per il raggio R dell'orbita circolare della Terra attorno al punto fisso O possiamo prendere quello che corrisponde all'equilibrio tra la forza gravitazionale $\mathbf{F}_G$ data dall'eq.(3) e quella centrifuga, tale cioè che sia:

$$F_G = \frac{GMm}{R^2} = F_{cf} = m \dot{\theta}^2 R, \quad (20)$$

ovvero:

$$R = \sqrt[3]{\frac{GM}{\dot{\theta}^2}}. \quad (21)$$

La sostituzione di tale risultato nell'espressione del Momento Angolare L_O , ci permette quindi di scrivere:

$$L_O = m R^2 \dot{\theta} = m \dot{\theta} \left(\frac{GM}{\dot{\theta}^2}\right)^{2/3} = \frac{(GM)^{2/3} m}{\sqrt[3]{\dot{\theta}}}, \quad (22)$$

dalla quale otteniamo per la velocità angolare costante $\dot{\theta}$ il seguente risultato:

$$\dot{\theta} = \frac{G^2 M^2 m^3}{L_O^3} \equiv \Gamma, \quad (23)$$

coincidente proprio con il fattore Γ definito in eq.(11) e presente nel risultato (10) ottenuto nel caso delle orbite ellittiche di Keplero. Sostituendo infine la (23) nell'eq.(19) otteniamo così la formula della velocità angolare $\dot{\phi}$ in funzione dell'angolo polare ϕ del raggio vettore $\mathbf{ST}$, nel contesto del modello “eccentrico”:

$$\dot{\phi} = \Gamma \left(1 + \frac{e \cos \phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi - e \cos \phi}}\right). \quad (24)$$

Il grafico di questa funzione, con l'eccentricità dell'orbita terrestre ancora data dal valore ottenuto in eq.(2), è mostrato in Fig. 4 (curva “viola”), congiuntamente ai risultati relativi agli altri due modelli, quello di Copernico (curva “verde”), e quello “corretto” delle orbite ellittiche di Keplero (curva “rosa”) corrispondente all'eq.(10).

4 Conclusioni

Escludendo evidentemente il modello di Copernico nel contesto del quale la velocità angolare del raggio vettore $\mathbf{ST}$ è per ipotesi costante ($\dot{\phi} = \text{cost.}$), contrariamente a quanto osservato, vediamo dai grafici riportati in Fig. 4 che il modello “eccentrico” ha in effetti lo stesso comportamento di quello delle orbite ellittiche. Ciò che cambia è l'ampiezza delle oscillazioni di questa velocità angolare attorno al valore medio (corrispondente al moto circolare

uniforme del Modello di Copernico). Tipicamente, il Modello “corretto” con le orbite di Keplero prevede oscillazioni di ampiezza doppia rispetto a quelle che caratterizzano il Modello *eccentrico*⁸; le prime arrivano a circa il 3.4 %, mentre le seconde non superano il 1.7 %. La conclusione che ne possiamo trarre è che, almeno per quanto riguarda le osservazioni della variazione di distanza del Sole dalla Terra, evidenziate dal diverso diametro angolare (apparente) del disco solare, come pure dai dati relativi alla variazione della velocità angolare del moto apparente del Sole attorno alla Terra, il Modello “eccentrico” poteva in effetti “*salvare i fenomeni*” (per dirla à la *Duhem*), a meno di poter effettuare osservazioni e misurazioni della velocità angolare con una precisione dell’ 1 %.

5 Appendice

In questa *Appendice* vogliamo, essenzialmente a fini didattici, fornire la soluzione dell’equazione del moto di un pianeta di massa m (che nel nostro caso possiamo considerare la stessa Terra T) soggetto ad una Forza Gravitazionale (3) dovuta ad un corpo centrale pesante di massa M (il Sole) posto in un punto fisso S . A tal fine sfrutteremo alcuni dei risultati ottenuti già nel §2, come pure quelli riportati nel nostro precedente articolo [2] sullo stesso argomento.

Poiché la Forza di Gravitazione Universale è *conservativa*, l’Energia Meccanica E è una costante del moto, data dalla somma dell’Energia Cinetica e dell’Energia Potenziale. Utilizzando di nuovo le coordinate polari piane (r, ϕ) , la prima si esprime come:

$$T = \frac{1}{2} m |\dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\phi} \hat{\phi}|^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2). \quad (25)$$

L’Energia Potenziale si ottiene invece integrando la forza (3):

$$U(r) = - \int_{\infty}^r \mathbf{F}_G(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = GMm \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr = - \frac{GMm}{r}, \quad (26)$$

dove, come di consueto, si è posto

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U(r) = 0.$$

Sostituendo quindi per $\dot{\phi}$ l’espressione (9), conseguenza della conservazione del Momento Angolare $\mathbf{L}_S$, e sommando le eq.(25) e (26), si ottiene per l’Energia Meccanica la seguente formula:

$$E = T + U = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L_S^2}{2 m r^2} - \frac{GMm}{r}. \quad (27)$$

Per i *sistemi conservativi* è possibile ottenere l’equazione del moto derivando l’espressione dell’energia rispetto al tempo, e ponendola uguale a zero (visto che E è costante). Nel nostro caso, questo ci permette di scrivere:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{r} \left(m \ddot{r} + \frac{GMm}{r^2} - \frac{L_S^2}{m r^3} \right) = 0, \quad (28)$$

da cui si evince che l’equazione del moto può essere scritta come segue:

⁸Naturalmente ciò è vero solo assumendo per i due modelli lo stesso valore dell’*eccentricità* e . È interessante notare che adottando per il Modello *eccentrico* un valore doppio di e rispetto al modello di Keplero con orbite ellittiche, questi risulterebbero essenzialmente indistinguibili, almeno per quanto riguarda la variazione della velocità angolare $\dot{\phi}$ dell’orbita (apparente) del Sole.

$$m \ddot{r} + \frac{GMm}{r^2} - \frac{L_S^2}{m r^3} = 0. \quad (29)$$

Il cambiamento di variabile ottenuto ponendo $r = \frac{1}{u}$ trasforma questa equazione in una forma facilmente integrabile. Osserviamo infatti che:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{d\phi} \dot{\phi} = \dot{\phi} \frac{dr}{du} \frac{du}{d\phi} = -\frac{\dot{\phi}}{u^2} \frac{du}{d\phi} = -\frac{L_S}{m} u', \\ \ddot{r} &= \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{L_S}{m} u' \right) = \frac{d}{d\phi} \left(-\frac{L_S}{m} u' \right) \frac{d\phi}{dt} = -\frac{L_S}{m} u'' \dot{\phi} = -\frac{L_S^2}{m^2} u^2 u'', \end{aligned} \quad (30)$$

con l'apice ad indicare la differenziazione rispetto a ϕ e dove si è tenuto conto della (6). Sostituendo quindi quest'ultima formula nell'eq.(29), si ottiene:

$$m \left(-\frac{L_S^2}{m^2} u^2 u'' \right) + GMm u^2 - \frac{L_S^2}{m} u^3 = 0, \quad (31)$$

ovvero:

$$u'' + u = \frac{GMm^2}{L_S^2} \equiv K, \quad (32)$$

che è la ben nota “*equazione armonica*”. Facendo per esempio riferimento alla breve trattazione delle equazioni differenziali presentata nel cap. 5 dei nostri “*Complementi di Analisi Matematica*” [6], sappiamo che la soluzione di questa equazione è esprimibile come somma della soluzione u_o della sua equazione *omogenea associata* (data da un semplice moto armonico) e di un integrale *particolare*, che nel nostro caso deve essere costante e coincidente con lo stesso *termine noto*: $u_p = K$. Per cui, otteniamo:

$$\frac{1}{r(\phi)} = u(\phi) = u_o(\phi) + u_p = A \cos(\phi + \gamma) + K, \quad (33)$$

dove A e γ sono costanti d'integrazione. Questo risultato dimostra quindi che in effetti la traiettoria del pianeta (e quindi anche della Terra stessa) è un'ellisse, essendo la sua equazione polare della forma data nella (8):

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \phi}, \quad (34)$$

dove si è scelto $\gamma = 0$ affinché l'angolo $\phi = 0$ corrisponda alla minima distanza (dal Sole, fisso nel *fuoco* dell'ellisse), e dove l'eccentricità e e il *parametro* p sono dati, rispettivamente, da:

$$e = \frac{A}{K} = \frac{L_S^2}{GMm^2} A, \quad p = \frac{1}{K} = \frac{L_S^2}{GMm^2}, \quad (35)$$

in accordo con quanto già anticipato nell'eq.(9). Infine, per poter determinare anche il valore dell'altra costante d'integrazione, A , possiamo utilizzare la formula per l'eccentricità già ottenuta in [2] che qui riportiamo:

$$e = \sqrt{1 - \frac{2L_S^2 |E|}{G^2 M^2 m^3}}, \quad (36)$$

dove $|E|$ è il valore assoluto dell'energia (che è chiaramente *negativa*, trattandosi di uno “stato legato”). Dalla prima delle eq.(35) troviamo così che:

$$A = e K = \frac{GMm^2}{L_S^2} \sqrt{1 - \frac{2L_S^2 |E|}{G^2 M^2 m^3}}. \quad (37)$$

References

- [1] Stefano Ranfone, *Complementi di Fisica*, Pisa, ETS, 2016.
- [2] Stefano Ranfone, “*Appunti sul Moto dei Corpi in un Campo Gravitazionale*”, (2018); URL: <https://www.academia.edu/37567822/>
- [3] Johannes Kepler, *Astronomia Nova..., seu physica coelestis*, Heidelberg, 1609.
- [4] Isaac Newton, *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*, Londra, 1687.
- [5] Nicolaus Copernicus, *De Revolutionibus Orbium Coelestium*, Norimberga, 1543.
- [6] Stefano Ranfone, “*Ulteriori considerazioni sulla trattazione degli Urti Elastici nel XVII-XVIII secolo: Keill, Wallis e Wren*”, (2020); URL: <https://www.academia.edu/42332762/>
- [7] John Keill, *An Introduction to the True Astronomy: or, Astronomiical Lectures Read in the Astronomical school of the University of Oxford.*, Londra, 1721.
- [8] Olaf Pedersen, “*Early Physics and Astronomy*”, Cambridge, Cambridge University Press, 1993.
- [9] Stefano Ranfone, “*Complementi di Analisi Matematica*”, (2014); URL: <https://www.academia.edu/9220851/>

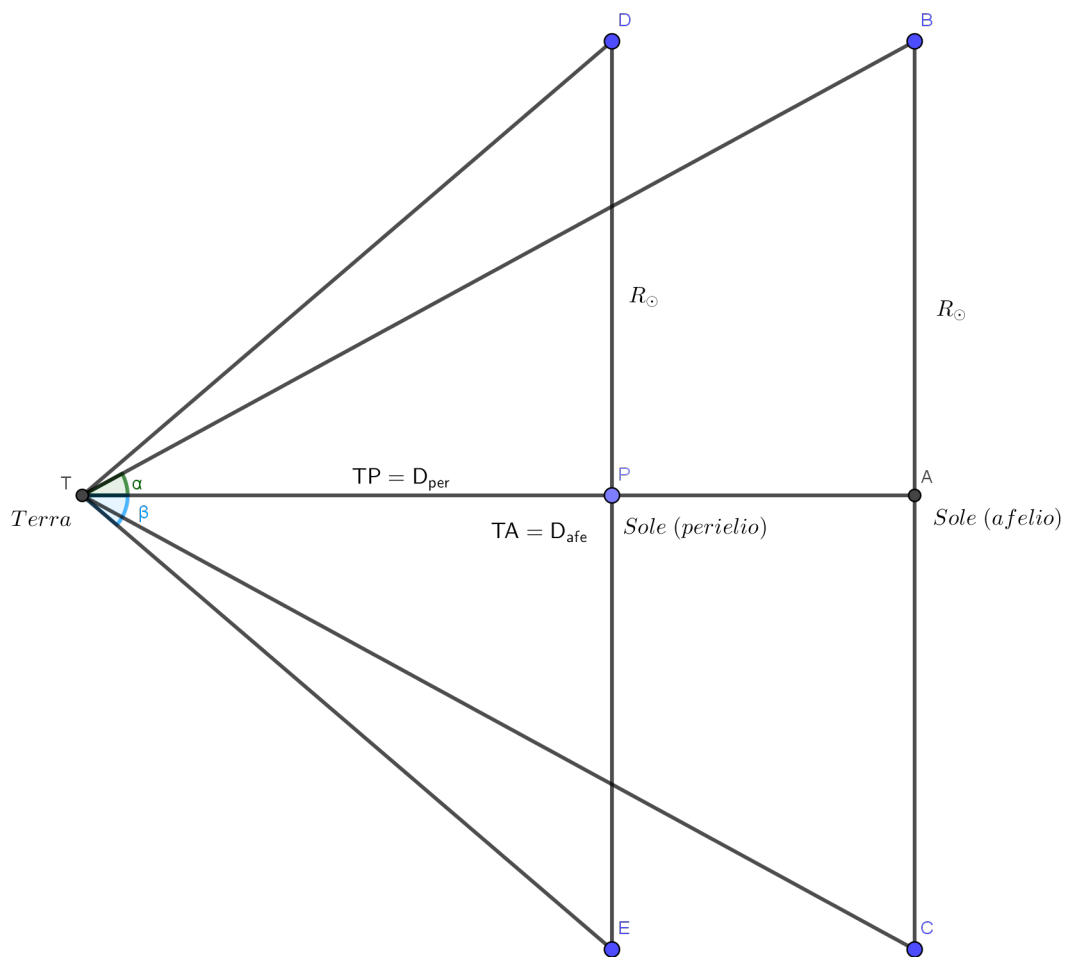


Fig.1 [Diametro angolare del Sole al Perielio e all'Afelio dell'orbita terrestre.]

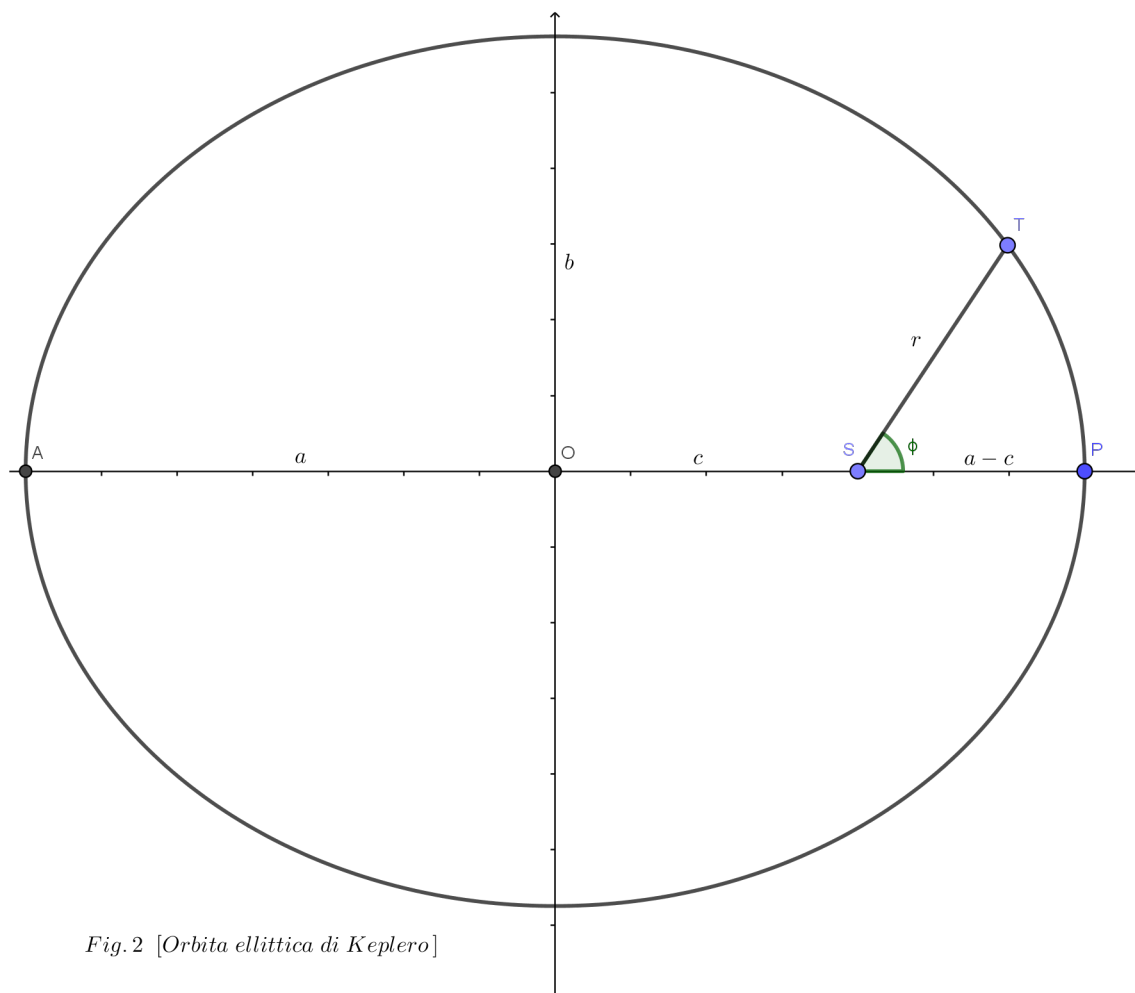


Fig. 2 [Orbita ellittica di Keplero]

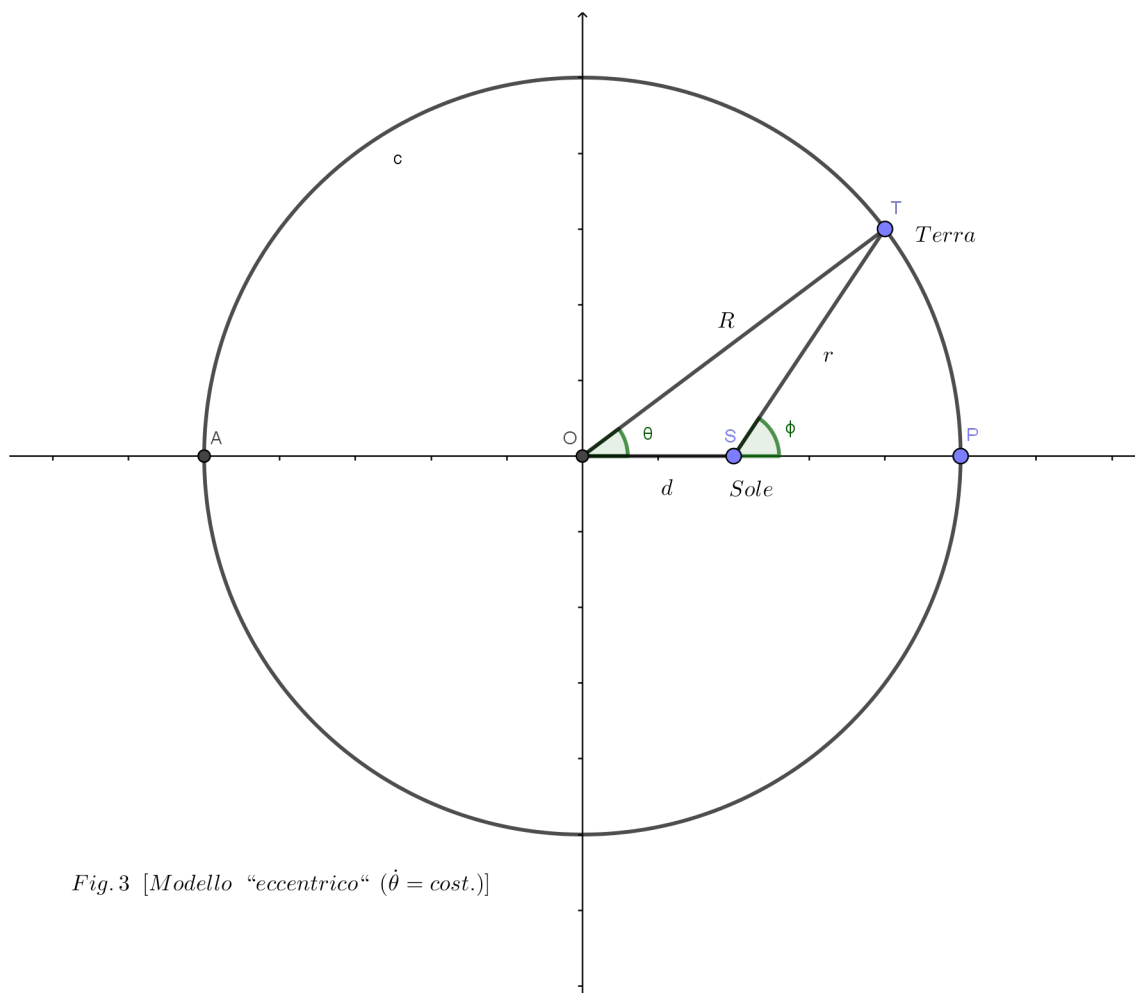


Fig. 3 [Modello “eccentrico” ($\dot{\theta} = \text{cost.}$)]

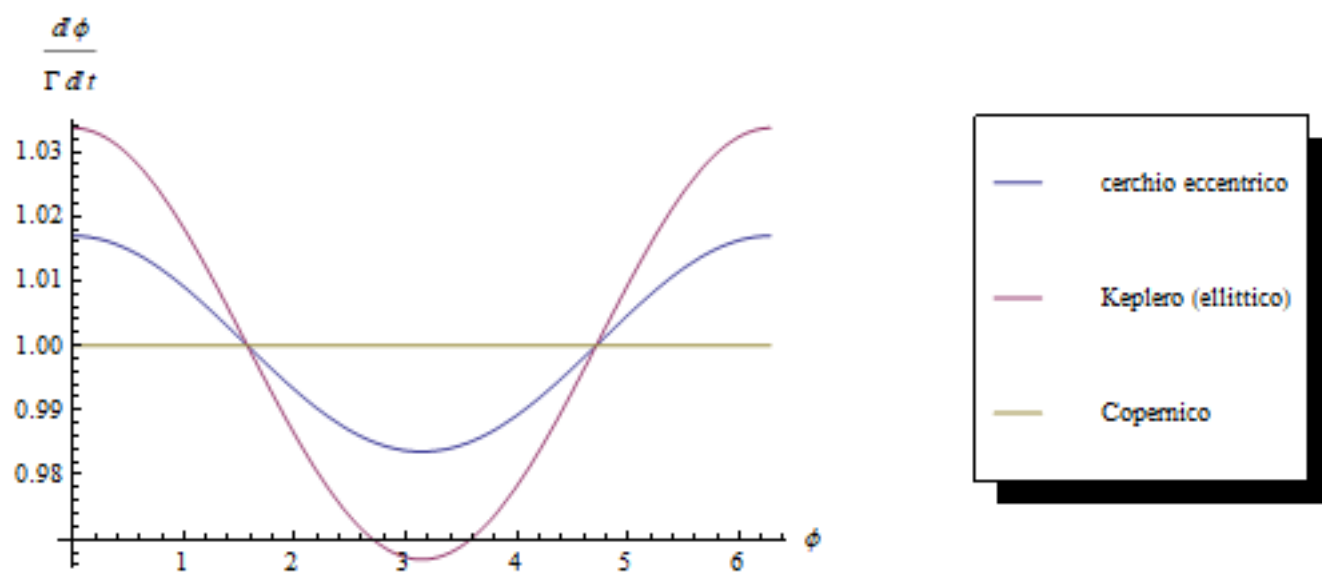


Fig. 4 [La velocità angolare $\dot{\phi}(\phi)$ nei tre Modelli considerati.]