Moti centrali ed equazione di Keplero. Excursus nei "Principia" di Newton

Stefano Ranfone *

Abstract

Keywords: Fisica, Newton, Forze Centrali, Equazione di Keplero, Moto dei Pianeti.

In questo lavoro, ispirati anche dall'originale trattazione data da Newton nei suoi "Principia Mathematica Philosophiae Naturalis", vogliamo fare alcune considerazioni sul cosiddetto "Problema Inverso" nel caso di Forze Centrali, con particolare attenzione alla Gravitazione Universale. Tale studio, oltre a dimostrare la nota proporzionalità inversa col quadrato della distanza, ci permette di ritrovare le Leggi di Keplero per il caso generale di orbite ellittiche per i pianeti. Allo scopo di determinare la posizione di questi ultimi ad ogni istante, nella parte conclusiva diamo una breve trattazione dell'equazione di Keplero, presentando i due metodi suggeriti dallo stesso Newton nei suoi "Principia", che permettono di cercarne soluzioni numeriche approssimate .

[In this work, also inspired by the original treatment given by Newton in his "Principia Mathematica Philosophiae Naturalis", we wish to make some consederations about the so-called "Inverse Problem" in the case of Central Forces, with a particular attention given to the Universal Gravitation. Such a study, in addition to demonstrating the known inverse proportionality with the distance squared, allows to get Kepler's Laws for the general elliptical motion of planets. In order to find their position at any arbitrary instant of time, in the last part we give a brief account of Kepler's equation, also discussing the two methods suggested by Newton himself in his "Principia" which allow us to find its approximate numerical solutions.]

1 Introduzione

Lo studio del moto in un campo di forze centrali ha da sempre avuto un ruolo fondamentale nel contesto della Meccanica Classica. Un'importanza dovuta anche al fatto che il Moto dei Corpi Celesti, come i pianeti e le comete, nel campo gravitazionale di un massiccio oggetto centrale come il Sole, può essere considerato come un caso particolare di "Moto in un Campo di Forze Centrali". In due precedenti lavori ([1] e [2]) abbiamo già studiato il problema relativo al moto dei pianeti, in qualche modo estendendo la breve trattazione già data in [3]. Nel presente lavoro intendiamo investigare alcuni aspetti che non abbiamo avuto modo di affrontare in precedenza. Uno di questi è il cosiddetto *"Problema Inverso"*, ovvero il problema di determinare il tipo di *Forza Centrale* che può essere associata ad una particolare traiettoria od orbita assegnata. Solitamente oggi si preferisce trattare il cosiddetto *"Problema Diretto"*, ovvero quello di determinare la forma delle traiettorie percorse da corpi soggetti ad una ben definita forza centrale. In effetti, in [3], [1], e nell'*Appendice* di [2], abbiamo dimostrato che i corpi soggetti ad un campo di forze gravitazionali, che come noto sono forze attrattive centrali di intensità inversamente proporzionale al quadrato della distanza (dal punto *centrale*, fisso nell'origine delle coordinate), percorrono necessariamente orbite "coniche": ovvero traiettorie circolari, ellittiche, paraboliche, iperboliche, o rettilinee (come nel caso della caduta di un grave lasciato cadere da una certa altezza nel campo gravitazionale terrestre). In particolare, in [3] e [1] abbiamo mostrato (*qualitativamente*) come i vari tipi di orbita corrispondano a diversi valori dell'energia

*email: sranfone@alice.it ; www.stefano-ranfone.it

meccanica del sistema: un'energia $E > 0$ è associabile a traiettorie iperboliche, un'energia nulla, $E = 0$, ad orbite paraboliche, un valore negativo $E < 0$ ad orbite ellittiche, ed infine, come caso particolare, un'energia meccanica negativa uguale al minimo valore possibile (pari al minimo dell' *"Energia Potenziale Efficace"*), ad orbite circolari. Nell'*Appendice* del lavoro successivo, [2], abbiamo peraltro risolto esplicitamente la corrispondente equazione del moto, ottenendo la forma analitica di queste orbite. Questo è per l'appunto, un esempio di *"Problema Diretto"*, la cui risoluzione permette di ottenere la forma algebrica delle traiettorie (*cartesiana* $y(x)$, o *polare* $r(\phi)$) a partire dal tipo di forza presente. Nel XVII secolo, quando Newton affrontò questo stesso problema nei suoi *"Principia"* [4], si preferiva considerare come *"Problema Diretto"* quello che oggi viene detto *"Inverso"*. In effetti, in questo modo Newton riuscì a dimostrare che la forza responsabile dei moti ellittici dei pianeti (traiettorie già scoperte empiricamente da Keplero tra la fine del XVI e l'inizio del XVII secolo) era in effetti una forza attrattiva con una intensità che decresce in ragione inversa del quadrato della distanza dal centro fisso (ove è posto il Sole). Questo risultato può venire espresso in forma concisa dalla nota formula di Newton della *Gravitazione Universale*:

$$\mathbf{F}_G = -\frac{G_N\, M\, m}{r^2}\, \hat{\mathbf{r}}\,, \tag{1}$$

dove $\mathbf{F}_G$ è la forza a cui è soggetto un corpo di massa m posto nel punto P, di raggio vettore $\mathbf{OP} \equiv \mathbf{r}$, esercitata da un corpo di massa M posto in O. Naturalmente, nel caso che ci interessa, ovvero del moto dei pianeti attorno al Sole, essendo la massa di quest'ultimo molto maggiore di quella di tutti i pianeti ($M \gg m$), questo può considerarsi fisso e in quiete nell'origine O delle coordinate. Per questo motivo il generico pianeta di massa m, può considerarsi in moto nel *"Campo di Forze Centrale"* $\mathbf{F}_G$ espresso dall'eq.(1). Trattandosi di un Campo *Conservativo*, possiamo definire una corrispondente *Energia Potenziale* [3], che risulta essere data da:

$$U_G(r) = -\int_{\infty}^{r} \mathbf{F}_G \cdot d\mathbf{r} = \int_{\infty}^{r} \frac{G_N\, M\, m}{r^2}\, dr = -\frac{G_N\, M\, m}{r}\,. \tag{2}$$

Ricordiamo qui che nel caso di Forze Centrali le traiettorie sono sempre *piane*, in conseguenza del fatto che, essendo nullo il relativo *"Momento delle Forze"* (rispetto al centro O, dove è posto il Sole):

$$M_O = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}_G = -\mathbf{r} \wedge \hat{\mathbf{r}}\, \frac{GMm}{r^2} = 0 = \frac{d\mathbf{L}_O}{dt}\,, \tag{3}$$

deve necessariamente conservarsi il *"Momento Angolare"* $\mathbf{L}_O$. Questo ci autorizza ad utilizzare coordinate polari piane per descrivere la generica posizione del pianeta, per il quale possiamo assumere un moto nel piano $z = 0$. In tale sistema di coordinate, il Momento Angolare risulta pertanto essere dato (si veda [3] e [1] per maggiori dettagli) da:

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{OP} \wedge m\, \mathbf{v} = m\, \mathbf{r} \wedge (\dot{r}\, \hat{\mathbf{r}} + r\, \dot{\phi}\, \hat{\phi}) = m\, r^2\, \dot{\phi}\, \hat{\mathbf{k}} = L_O\, \hat{\mathbf{k}} = \text{cost.}, \tag{4}$$

dove $\dot{\phi} \equiv \frac{d\phi}{dt}$ è la velocità angolare e $\hat{\mathbf{k}}$ è il versore diretto verso l'asse z, perpendicolare al piano in cui avviene il moto.

La *"Seconda Legge di Keplero"*, come noto[1], detta anche *"Legge delle Aree"*, esprime il fatto che in ogni moto in campo centrale il raggio vettore del corpo *"spazza aree uguali in tempi uguali"*; in altre parole, risulta essere costante la cosiddetta *Velocità Areolare*:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}\, r^2\, \dot{\phi} = \frac{L_O}{2\, m} = \text{cost.} \tag{5}$$

[1] Si rimanda di nuovo a quanto già esposto nei precedenti lavori, [3], [1], [2].

Sottolineiamo che questa *"Legge delle Aree"* non vale solo nel caso del campo gravitazionale, ma è valida per un generico campo di forze centrali. Invito a vederne la brillante dimostrazione puramente geometrica che ne dà Newton stesso nel Primo Libro dei suoi *"Principia"* (*Prop. I. Theor. I*, a pag. 37 della Prima Edizione, [4]) .

In [3] avevamo anche giustificato la *Terza Legge di Keplero*, valida tuttavia per il solo campo gravitazionale, limitandoci però solo al caso di orbite circolari, essenzialmente imponendo che la forza gravitazionale sia costantemente bilanciata da quella centrifuga:

$$\frac{G_N\, M\, m}{r^2} = m\,\omega^2\, r = \frac{m\, 4\pi^2\, r}{T^2}\,, \tag{6}$$

dove si è indicato con $\omega \equiv \dot{\phi} = 2\pi/T$ la velocità angolare (costante nel caso di orbite circolari) del pianeta, e con T il suo Periodo di Rivoluzione attorno al Sole. Da questa equazione troviamo che per tutti i pianeti deve essere costante il rapporto tra il cubo del raggio dell'orbita (distanza dal Sole) ed il quadrato del Periodo T:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G_N\, M}{4\,\pi^2} = \text{cost.} \tag{7}$$

Nel §2.1 generalizzeremo questo risultato al caso più realistico di orbite ellittiche, mostrando che per un dato sistema planetario[2] risulta essere costante il rapporto tra il cubo del *semiasse maggiore* a dell'orbita ed il quadrato del Periodo di Rivoluzione T. Infine, nel §3 tratteremo della cosiddetta *"Equazione di Keplero"*, la cui risoluzione permette in linea di principio di determinare la posizione del pianeta ad un generico istante di tempo t (anziché in funzione dell'angolo polare ϕ, come invece risulta dall'equazione dell'orbita scritta in forma polare $r(\phi)$). Poiché l'equazione di Keplero risulta essere non risolvibile esattamente per via analitica, cercheremo di fornire i due metodi di risoluzione approssimativa introdotti dallo stesso Newton nei suoi *"Principia"* [4].

2 Moto in Campo di forze Centrali: il "Problema Inverso"

Un campo di forze centrali può essere espresso come $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\,\hat{\mathbf{r}}$. Oltre a garantire traiettorie piane, in conseguenza della conservazione del *Momento Angolare*, tali forze sono sempre anche necessariamente *conservative*[3], poiché, potendo essere non-nulla solo la derivata $\frac{\partial F}{\partial r}$, il loro *rotore* è sempre identicamente nullo: $\nabla \wedge \mathbf{F} = 0$. Ciò significa che possiamo sempre associare a tali forze un'*Energia Potenziale* $U(r)$, definita, a meno di una costante additiva arbitraria, come nella (2), da:

$$U(r) = -\int \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot\, d\mathbf{r} = -\int F(r)\, dr\,, \tag{8}$$

tale che $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(r)$, ovvero $F(r) = -\frac{dU}{dr}$.

Poiché nel caso di forze centrali, come abbiamo visto, le traiettorie sono sempre piane, l'utilizzo di coordinate polari piane (r, ϕ) ci permette di esprimere la velocità del corpo di massa m come somma della sua velocità *radiale* e di quella *tangenziale*, come nell'eq.(4):

$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\,\dot{\phi}\,\hat{\phi}\,. \tag{9}$$

Questa espressione ci permette di scrivere l'energia meccanica, una costante del moto data dalla somma di quella cinetica e di quella potenziale, nella seguente forma:

[2] Naturalmente, ciò vale anche per tutti i satelliti in rotazione attorno ad un certo pianeta.

[3] Ciò è vero fintantoché l'intensità della forza radiale dipende soltanto dalla coordinata radiale r, cioè se è una arbitraria funzione del tipo $F(r)$.

$$E = \frac{1}{2}\, m\, v^2 + U(r) = \frac{1}{2}\, m\, \left(\dot{r}^2 + r^2\, \dot{\phi}^2\right) + U(r) = \frac{1}{2}\, m\, \dot{r}^2 + \frac{{L_O}^2}{2\, m\, r^2} + U(r)\,, \tag{10}$$

dove nell'ultimo *step* si è di nuovo uitilizzata l'eq.(4). L'equazione del moto può essere ottenuta, come di consueto[4], uguagliando a zero la derivata temporale dell'energia stessa (essendo $E =$ cost.), ottenendo così:

$$\frac{dE}{dt} = m\, \dot{r}\, \ddot{r} - \frac{{L_O}^2}{m\, r^3}\, \dot{r} + \frac{dU}{dr}\, \dot{r} = 0\,, \tag{11}$$

da cui, in definitiva:

$$m\, \ddot{r} = \frac{{L_O}^2}{m\, r^3} + F(r)\,, \tag{12}$$

(essendo $F(r) = -\frac{dU}{dr}$ l'espressione della forza centrale che cerchiamo). Poiché, come si è detto, nel *"Problema Inverso"* si suppone nota l'equazione della traiettoria, ovvero la funzione $r(\phi)$, è necessario esprimere l'accelerazione radiale $\ddot{r} \equiv \frac{d^2 r}{dt^2}$ in termini delle derivate della funzione $r(\phi)$ rispetto all'angolo polare: $r' \equiv \frac{dr}{d\phi}$, $r'' \equiv \frac{d^2 r}{d\phi^2}$. Si trova così:

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi}\, \frac{d\phi}{dt} = r'\, \dot{\phi}\,, \tag{13}$$

e:

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{d}{dt}(r'\, \dot{\phi}) = r''\, \dot{\phi}^2 + r'\, \ddot{\phi} = r''\, \left(\frac{L_O}{m\, r^2}\right)^2 + r'\, \frac{d}{dt}\left(\frac{L_O}{m\, r^2}\right) = r''\, \left(\frac{L_O}{m\, r^2}\right)^2 + r'\, \frac{d}{d\phi}\left(\frac{L_O}{m\, r^2}\right)\, \dot{\phi} = \\ &= \frac{{L_O}^2}{m^2\, r^4}\, r'' - \frac{2\, {L_O}^2}{m^2\, r^5}\, (r')^2\,, \end{aligned} \tag{14}$$

dove abbiamo più volte sfruttato l'eq.(4), grazie alla quale si può esprimere la velocità angolare come $\dot{\phi} = \frac{L_O}{m\, r^2}$. Sostituendo nell'equazione del moto (12) l'espressione per $\ddot{r}$ ottenuta nella (14) si trova per la forza $F(r)$ la seguente formula:

$$\begin{aligned} F(r) &= \frac{{L_O}^2}{m\, r^4}\, r'' - \frac{2\, {L_O}^2}{m\, r^5}\, (r')^2 - \frac{{L_O}^2}{m\, r^3} = \\ &= \frac{{L_O}^2}{m\, r^3}\, \left[\frac{r''}{r} - \frac{2}{r^2}\, (r')^2 - 1\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Tuttavia, notando che:

$$\frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{r^2}\, r'\right) = \frac{1}{r^2}\, r'' - \frac{2}{r^3}\, (r')^2 = \frac{1}{r}\, \left[\frac{r''}{r} - \frac{2}{r^2}\, (r')^2\right]\,, \tag{16}$$

risulta più conveniente esprimere la forza $F(r)$ come:

[4] Si veda, per es., [3] a pag. 40.

$$F(r) = \frac{{L_O}^2}{m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r^2} r' \right) - \frac{1}{r^3} \right] . \tag{17}$$

In linea di principio questa formula ci permette di determinare la forza a cui è soggetto un corpo la cui traiettoria (piana) è descritta in coordinate polari dalla funzione $r(\phi)$. Per maggior chiarezza ne daremo qui un paio di esempi significativi.

2.1 Orbite Ellittiche

In questo primo esempio affrontiamo il problema relativo al moto dei pianeti che, come noto[5], percorrono traiettorie ellittiche. L'equazione in forma polare di un'ellisse può essere espressa nella forma:

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos\phi} , \tag{18}$$

dove ϵ è la sua eccentricità ($\epsilon < 1$ nel caso di un ellisse, $\epsilon > 1$ nel caso di una iperbole) e p è il cosiddetto *"parametro"*, pari alla metà del "lato retto", il cui significato geometrico sarà chiarito più avanti, quando esprimeremo sia ϵ che p in termini dei coefficienti a, b, c presenti nell'equazione *canonica* dell'ellisse. Derivando rispetto all'angolo *polare* ϕ ambo i membri dell'eq.(18), troviamo:

$$r' = \frac{p\,\epsilon\, \sin\phi}{(1 + \epsilon \cos\phi)^2} , \tag{19}$$

e quindi:

$$\frac{r'}{r^2} = \frac{\epsilon}{p} \sin\phi , \tag{20}$$

da cui segue che:

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r^2} r' \right) - \frac{1}{r^3} \right] = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\epsilon}{p} \cos\phi - \frac{1 + \epsilon \cos\phi}{p} \right] = -\frac{1}{p\,r^2} . \tag{21}$$

Sostituendo questa espressione nell'eq.(17) si ottiene perciò:

$$F(r) = \frac{{L_O}^2}{m} \left(-\frac{1}{p\,r^2} \right) = -\frac{{L_O}^2}{p\,m} \cdot \frac{1}{r^2} . \tag{22}$$

Utilizzando infine per il parametro p il risultato ottenuto in [2] (dato a pag. 8 nell'eq.(35)) risolvendo esplicitamente l'equazione del moto (12) - *"Problema Diretto"* - nel caso specifico della forza di *Gravitazione Universale* newtoniana:

$$p = \frac{{L_O}^2}{G_N\, M\, m^2} , \tag{23}$$

si ottiene in definitiva il risultato previsto:

[5] Per una dimostrazione rimandiamo di nuovo ai nostri precedenti lavori [3], [1] e [2].

$$F(r) = -\frac{G_N\, M\, m}{r^2}\,, \tag{24}$$

che è la ben nota formula di Newton della *"Gravitazione Universale"* già data nella (1), e che quindi esprime la forza responsabile dei moti ellittici dei pianeti attorno al Sole.

Prima di chiudere questo primo esempio di "Problema Inverso", vogliamo ottenere la "Terza Legge di Keplero" per le Orbite Ellittiche dei pianeti, generalizzando il risultato ottenuto in [3] (a pag. 60) nella più semplice ipotesi di Orbite Circolari. A questo scopo può essere utile richiamare alcune delle proprietà notevoli dell'ellisse. La sua equazione cartesiana in *forma canonica* (riferita quindi ad un sistema di coordinate con l'origine coincidente col suo centro di simmetria e gli assi cartesiani contenenti gli stessi assi dell'ellisse) è data da:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \tag{25}$$

dove a e b sono rispettivamente i *semiassi* paralleli all'asse x ed all'asse y. Assumendo che a sia il semiasse maggiore e b quello minore ($a > b$), i due *Fuochi* dell'ellisse saranno posti sull'asse delle x simmetricamente rispetto al suo centro O, ad una distanza $c = \sqrt{a^2 - b^2} = a\sqrt{1-\epsilon^2}$, dove $\epsilon = c/a\,(< 1)$, è l'*eccentricità*. Per maggior chiarezza facciamo riferimento all'ellisse di *Fig. 1*. Il *parametro* p presente nell'equazione dell'ellisse scritta in forma polare data nell'eq.(18) ha la seguente interpretazione geometrica: è uguale alla metà del cosiddetto *"lato retto"*, ottenibile intersecando l'ellisse con una retta passante per uno dei due fuochi e parallela all'asse minore. In altre parole, p è uguale al valore assoluto delle ordinate y dei punti dell'ellisse aventi la stessa ascissa $x = c$ di uno dei due fuochi. Ponendo quindi $x = c$ e $y = p$ nell'eq.(25), troviamo:

$$p = b\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\,(a^2 - c^2) = a\,(1-\epsilon^2)\,, \tag{26}$$

risultato che ci sarà utile tra breve. D'altra parte, dalle eq.(23) e (5), troviamo che questo stesso *parametro* p è anche proporzionale al quadrato della velocità areolare:

$$p = \frac{4}{G_N\, M}\,\dot{A}^2\,, \tag{27}$$

risultato che costituisce la *Prop. XIV, Theor. VI* del Primo Libro dei *"Principia"* di Newton (pag. 55 della Prima Edizione, [4]). Da questa equazione, utilizzando anche la (26), possiamo ottenere per la *velocità areolare* $\dot{A}$, che è costante, la seguente espressione:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}\sqrt{G_N\, M\, p} = \frac{1}{2}\sqrt{G_N\, M\, a\,(1-\epsilon^2)}\,. \tag{28}$$

A questo punto, ricordando che l'area racchiusa da un'ellisse è data da $A = \pi\, a\, b$, possiamo calcolare il *Periodo di Rivoluzione* di un pianeta nel suo moto attorno al Sole come:

$$T = \frac{A}{\dot{A}} = \frac{2\pi\, a\, b}{\sqrt{G_N\, M\, a\,(1-\epsilon^2)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{G_N\, M}}\, a^{3/2}\,, \tag{29}$$

da cui segue la ben nota forma con la quale è nota la *"Terza Legge di Keplero"*:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G_N\, M}{4\,\pi^2}\,. \tag{30}$$

Come si vede, questa formula è molto simile a quella valida nel caso di orbite circolari (come già detto, ottenuta a pag. 60 in [3]), con la sostituzione del raggio di queste ultime col *semiasse maggiore* a per le orbite ellittiche.

2.2 Orbita a Spirale

Concludiamo questa parte relativa allo studio del cosiddetto "problema inverso" in presenza di forze centrrali, fornendo un secondo esempio. In particolare, vogliamo determinare il tipo di forza (centrale) che può essere associato a traiettorie a spirale descritte dall'equazione (in coordinate polari):

$$r(\phi) = r_0\, e^{\phi}\,. \tag{31}$$

Utilizzando di nuovo la formula (17), ed osservando che in questo caso $r' = r$, per cui:

$$\frac{d}{d\phi}\left(\frac{r'}{r^2}\right) = \frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{r'}{r^2} = -\frac{1}{r}\,, \tag{32}$$

si ottiene facilmente:

$$F(r) = \frac{{L_O}^2}{m}\left[\frac{1}{r^2}\,\frac{d}{d\phi}\left(\frac{r'}{r^2}\right) - \frac{1}{r^3}\right] = -\frac{2\,{L_O}^2}{m\,r^3} = -\frac{K}{r^3}\,, \tag{33}$$

mostrando che la forza centrale che può causare un moto a spirale attorno al centro O con una traiettoria data dall'eq.(31) è una forza attrattiva di intensità inversamente proporzionale al cubo della distanza dallo stesso centro O.

3 Sull'"Equazione di Keplero": Trattazione di Newton

In quest'ultima parte vogliamo affrontare il problema della determinazione della posizione di un pianeta in moto su un'orbita ellittica attorno al Sole, ad un generico istante di tempo t, con $0 \le t \le T$, essendo chiaramente T il Periodo di Rivoluzione. Affronteremo questo problema attraverso lo studio della cosiddetta *"Equazione di Keplero"*, sulla falsa riga, anche se con un approccio più attuale, di quanto esposto dallo stesso Newton nei suoi *"Principia"* [4]. A tal fine ci è stata utile anche l'interessante *"rilettura"* dell'*Opera* newtoniana in chiave più moderna fatta da Pask in [8], a cui ci siamo ispirati anche per alcune delle notazioni utilizzate.

Senza perdita di generalità, e facendo riferimento alla *Fig. 1*, assumeremo che che all'istante $t = 0$ il pianeta si trovi nel *perielio* $Q(a\,;0)$ (a cui corrisponde l'angolo polare nullo, $\phi = 0$), punto di minima distanza dal Sole S fisso nel fuoco $F(c\,,0)$. Il nostro problema consiste nell'individuare la posizione $P(r,\,\phi)$ del pianeta, ad un generico istante t. Poiché, come abbiamo ripetutamente detto, la velocità areolare $\dot{A} = \frac{A}{T} = \frac{\pi\,a\,b}{T}$ è costante, possiamo dire che l'area *"spazzata"* dal raggio vettore del pianeta nel tempo t, ovvero nell'intervallo di tempo $[0,\,t]$, è data da:

$$\mathcal{A}(FQP) = \dot{A}\,t = \pi\,a\,b\,\frac{t}{T}\,. \tag{34}$$

Per determinare quest'area può essere utile introdurre il cosiddetto *"cerchio ausiliario"*, avente il centro coincidente con quello dell'ellisse e raggio pari al semiasse maggiore a (vedi *Fig. 1*).

È evidente che tale cerchio può essere ottenuto dall'ellisse attraverso una semplice *dilatazione* (*"rescaling"*) della coordinata y: $y \to y' = \frac{a}{b}\, y$, in modo tale che, detto P il punto sull'ellisse dove si trova il pianeta all'istante considerato, detto N la sua proiezione sull'asse x , e detto P' il punto sul *cerchio ausiliario* ottenuto dal prolungamento del segmento NP (vedi *Fig. 1*), avremo che: $NP = \frac{b}{a}\, NP'$, cosicché anche le rispettive aree subiranno lo stesso *rescaling*:

$$\mathcal{A}(NQP) = \frac{b}{a}\, \mathcal{A}(NQP')\,. \tag{35}$$

L'angolo polare $\phi = \widehat{NFP}$ è detta *"Anomalia Vera"*, mentre l'angolo $\alpha = \widehat{NOP'}$ è detta *"Anomalia Eccentrica"*. È relativamente semplice determinare la relazione tra questi due angoli. Analizzando ancora la *Fig. 1*, troviamo che:

$$FN = ON - OF = a\, \cos\alpha - c = a\,(\cos\alpha - \epsilon)\,. \tag{36}$$

Inoltre:

$$NP = \frac{b}{a}\, NP' = \frac{b}{a}\, \cdot a\, \sin\alpha = b\, \sin\alpha = FN\, \tan\phi\,, \tag{37}$$

da cui, utilizzando l'eq.(36), otteniamo la relazione cercata:

$$b\, \sin\alpha = (a\, \cos\alpha - c)\, \tan\phi\,, \tag{38}$$

ovvero:

$$\sqrt{1-\epsilon^2}\, \sin\alpha = (\cos\alpha - \epsilon)\, \tan\phi\,. \tag{39}$$

A questo punto possiamo esprimere l'area del settore FQP da utilizzare nella (34) in termini dell'*Anomalia Eccentrica* α , osservando che tale area, somma delle aree del triangolo FNP e del settore NQP ,in virtù del *rescaling* dell'ordinata y, può essere scritta come segue:

$$\mathcal{A}(FQP) = \mathcal{A}_T(FNP) + \mathcal{A}(NQP) = \frac{b}{a}\, \left[\mathcal{A}_T(FNP') + \mathcal{A}(NQP')\right]\,. \tag{40}$$

Poiché

$$\mathcal{A}_T(FNP') = \frac{1}{2}\, FN \cdot NP' = \frac{1}{2}\, a^2\, \sin\alpha\,(\cos\alpha - \epsilon)\,, \tag{41}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(NQP') &= \mathcal{A}(OQP') - \mathcal{A}_T(ONP') = \frac{1}{2}\, \alpha\, a^2 - \frac{1}{2}\, a^2\, \sin\alpha\, \cos\alpha = \\ &= \frac{1}{2}\, a^2\, (\alpha - \sin\alpha\, \cos\alpha)\,, \end{aligned} \tag{42}$$

si ottiene:

$$\mathcal{A}(FQP) = \frac{b}{a}\left[\frac{1}{2}\,a^2\,\sin\alpha\,(\cos\alpha - \epsilon) + \frac{1}{2}\,a^2\,(\alpha - \sin\alpha\,\cos\alpha)\right] = \\ = \frac{1}{2}\,a\,b\,(\alpha - \epsilon\,\sin\alpha)\,. \tag{43}$$

Sostituendo questo risultato nell'eq.(34) si ottiene infine la cosiddetta *"Equazione di Keplero"*:

$$\alpha - \epsilon\,\sin\alpha = \frac{2\,\pi}{T}\,t\,\equiv \mu\,, \tag{44}$$

dove μ è detta *"Anomalia Media"*.

In linea di principio, la risoluzione di questa equazione permette di determinare la posizione del pianeta (attraverso l'anomalia eccentrica α) al variare dell'*Anomalia Media* μ, ovvero dello stesso tempo t. Il problema naturalmente è che questa equazione non è risolvibile esattamente per via analitica, per cui dovremo accontentarci di soluzioni numeriche approssimate. Prima di trattare brevemente questi metodi, gli stessi introdotti da Newton nei suoi *"Principia"* [4], vogliamo mostrare come le equazioni qui ottenute possono essere utilizzate, per esempio, anche per valutare la durata approssimativa delle stagioni nel caso dell'orbita terrestre.

Supporremo, per semplicità di calcolo, che l'asse delle apsidi, contenente il Perielio e l'Afelio dell'orbita, coincida con l'asse contenente i due solstizi[6]). In particolare, assumendo che all'istante $t = 0$ la Terra si trovi al Perielio (in prossimità del Solstizio invernale), dove sia l'*Anomalia Vera* ϕ che quella *Eccentrica* α sono nulle, vogliamo determinare a quale istante $\bar{t}$ essa si troverà *vicino* all'*Equinozio di Primavera*, corrispondente (nella nostra approssimazione) a $\phi = 90°$, conoscendo l'eccentricità dell'orbita terrestre, che risulta essere $\epsilon = 0.0167$, ed il periodo di Rivoluzione pari ad un anno, $T = 365.256$ giorni.

Dalla relazione esistente tra l'*Anomalia Vera* ϕ e quella *Eccentrica* α, data dall'eq.(39), notiamo che all'angolo $\phi = 90°$, in prossimità dell'*Equinozio di Primavera*, l'angolo α assume il valore $\bar{\alpha}$ per il quale $\cos\bar{\alpha} = \epsilon$. Sostituendo tale valore nell'equazione di Keplero (44) troviamo così:

$$\arccos\epsilon - \epsilon\,\sqrt{1-\epsilon^2} = \frac{2\,\pi}{T}\,\bar{t} \equiv \bar{\mu}\,, \tag{45}$$

da cui si ottiene una valutazione approssimativa[7] della durata della stagione invernale $\bar{t}$, ovvero l'intervallo di tempo che intercorre tra il *Solstizio d'Inverno* e l'*Equinozio di Primavera*:

$$\bar{t} = \frac{T}{2\,\pi}\,\left[\arccos\epsilon - \epsilon\,\sqrt{1-\epsilon^2}\right] \simeq 89.4 \text{ giorni}\,. \tag{46}$$

Chiaramente questa è anche la lunghezza (approssimativa) dell'autunno, intervallo di tempo tra l'equinozio autunnale (corrispondente ad una Anomalia Vera di quasi $\phi = 270°$) ed il solstizio d'inverno (dove $\phi \simeq 360° \equiv 0°$).

Poiché il solstizio d'estate, diametralmente opposto a quello invernale sarà in prossimità dell'afelio dell'orbita terrestre, in cui $\phi = 180°$, e la somma delle due stagioni, inverno e primavera, deve essere (nella nostra semplificativa

[6] In realtà, il cosiddetto asse degli *Apsidi*, contenente sia il Perielio che l'Afelio dell'orbita terrestre, forma un angolo di circa $12°$ rispetto a quello contenente i solstizi, per cui attualmente il Perielio cade intorno al 3 Gennaio e l'afelio intorno al 4 Luglio, mentre i due solstizi cadono il 22 dicembre (quello invernale) e il 21 Giugno (quello estivo). La durata dell'Inverno dovrebbe quindi corrispondere all'intervallo di tempo che impiega la Terra a portarsi da $\phi_1 = -12°$ a $\phi_2 = 90° - 12° = 78°$, mentre quella dell'Estate da $\phi_3 = 180° - 12° = 168°$ a $\phi_4 = 270° - 12° = 258°$. Per semplicità, qui abbiamo ignorato la differenza tra l'asse degli apsidi e quello dei solstizi; ciò non inficia sostanzialmente il nostro calcolo della lunghezza delle stagioni.

[7] L'approssimazione è dovuta alla non coincidenza dei solstizi col perielio e l'afelio dell'orbita. Si veda la precedente *Nota* 6.

assunzione di coincidenza tra l'asse dei solstizi e quello degli apsidi !), pari alla metà del periodo di Rivoluzione T, possiamo concludere che la primavera (come pure l'estate), avranno una durata approssimativa data da:

$$\hat{t} = \frac{T}{2} - \bar{t} = \frac{T}{2\,\pi}\,\left[\pi - \arccos\epsilon + \epsilon\,\sqrt{1-\epsilon^2}\right] \simeq \left(\frac{365.3}{2} - 89.4\right)\ \text{giorni}\ \simeq 93.3\,\text{giorni}\,. \tag{47}$$

In altre parole, troviamo che l'estate e la primavera hanno una durata maggiore rispetto all'autunno e all'inverno di circa 4 giorni. Ribadiamo che questo risultato è solo approssimativo, a causa delle ipotesi semplificative iniziali[8].

Con questa semplificazione è stato piuttosto facile utilizzare l'equazione di Keplero per gli equinozi ed i solstizi, poiché per questi punti dell'orbita siamo stati in grado di trovare i valori dell'*Anomali Media* μ, corrispondenti a particolari valori dell'*Anomalia Vera* ($\phi = 0,\ 90°,\ 180°,\ 270°$). Per tutti gli altri punti dell'orbita, purtroppo, non è possibile risolvere in modo esatto l'equazione di Keplero con una risoluzione analitica, per cui ci dobbiamo necessariamente limitare a fornirne una soluzione approssimata, utilizzando metodi di calcolo numerico. Ciò è esattamente ciò che fece lo stesso Newton nella sua opera maggiore [4].

3.1 Equazione di Keplero: metodo "grafico" di risoluzione approssimata

Il problema di trovare soluzioni numeriche approssimative dell'equazione di Keplero, allo scopo di prevedere la posizione di un pianeta ad un qualsiasi istante t (contato a partire dalla posizione del perielio, per cui $\phi(t=0) = 0$) fu affrontato e discusso dallo stesso Newton nella *Sezione VI* del *Libro Primo* dei suoi *Principia*, costituendo per l'esattezza la *"Proposizione XXXI. Problema XXIII"* (a pag. 107 della Prima Edizione del 1687, [4]).

Il primo metodo proposto da Newton gli fu probabilmente suggerito dall'amico Sir Christopher Wren, al quale si deve, tra i molti contributi allo sviluppo della Fisica e della Matematica del XVII secolo, anche la spiegazione degli *Urti Elastici*, argomento affrontato in un nostro precedente lavoro [5].

Si tratta essenzialmente di un metodo per così dire, *"grafico"* o *"geometrico"*, e utilizza una sorta di *"cicloide ridotta"*[9], detta "trocoide". Questa curva è ottenibile osservando il moto di un punto P posto ad una distanza a $(< R)$ dal centro di una ruota mantenuta in moto di puro rotolamento su un piano orizzontale con velocità $v = \omega\,R$, essendo ω la velocitò angolare. Il nome di "cicloide *ridotta*" è dovuto al fatto che il punto considerato P non si trova sul bordo della ruota, come nel caso della cicloide *ordinaria*, ma in un punto decentrato interno.

Si consideri come sistema di riferimento *"assoluto"* quello solidale col piano orizzontale (contenente l'asse x) sul quale avviene il moto di puro rotolamento della ruota, con l'asse y verso l'alto. All'istante iniziale $t = 0$ il centro della ruota C ed il punto P considerato abbiano in tale sistema, rispettivamente, coordinate $C(x_C = 0\,;\, y_C = R)$ e $P(x_P = 0\,; y_P = R - a)$. Nel sistema di riferimento *"relativo"*, solidale col centro C della ruota, e con assi $(x'\,,\,y')$ parallelli a quelli del sistema *assoluto*, il moto del punto P sarà un semplice moto circolare uniforme, descritto dalle seguenti *leggi orarie*:

$$\begin{cases} x'(t) = -a\,\sin\omega\,t\,, \\ y'(t) = R - a\,\cos\omega\,t\,. \end{cases} \tag{48}$$

Attraverso un'opportuna *"Trasformazione di Galileo"* possiamo pertanto scrivere le leggi orarie del punto P rispetto al sistema di riferimento *assoluto*, come:

$$\begin{cases} x(t) = x'(t) + v\,t = \omega\,R\,t - a\,\sin\omega\,t\,, \\ y(t) = y'(t) = R - a\,\cos\omega\,t\,, \end{cases} \tag{49}$$

[8] Essenzialmente, per aver gnorato il fatto che il perielio e l'afelio non coincidono con i due solstizi, essendoci tra essi un angolo di circa $12°$.

[9] In inglese, "curtate-cycloid".

dove si è utilizzato il fatto che la velocità di traslazione (nella direzione positiva delle x) del centro C è $v = \omega R$, in virtù della condizione di puro rotolamento[10].

Ponendo $\alpha = \omega t$ e $\epsilon = a/R\ (< 1)$ nelle equazioni (49), e scegliendo infine un raggio unitario, $R = 1$, otteniamo infine:

$$\begin{cases} x(\alpha) = \alpha - \epsilon \sin\alpha \equiv \mu(\alpha)\,, \\ y(\alpha) = 1 - \epsilon \cos\alpha\,. \end{cases} \tag{50}$$

Queste sono, per l'appunto, le equazioni (in forma parametrica) di una *"trocoide"* (o "cicloide ridotta"). In *Fig. 2* ne diamo un esempio (per $\epsilon = 0.3$), del quale ci serviremo più avanti.

Dalle eq.(50) vediamo che l'ascissa di un generico punto $\bar{P}$ di questa curva coincide proprio con l'*Anomalia Media* $\bar{\mu} = 2\,\pi/\bar{t}$, in corrispondenza della quale l'ordinata è $\bar{y} = 1 - \epsilon \cos\bar{\alpha}$. A questo punto risulta chiara la procedura da seguire per individuare la posizione del pianeta ad un generico istante $t = \bar{t}$. Notiamo innanzitutto che l'orbita viene percorsa in modo simmetrico rispetto al perielio (dove $\phi = 0$): $r(\phi) = r(2\pi - \phi)$, cosicché, detta $\phi(t)$ la *legge oraria* dell'Anomalia vera, deve aversi: $\phi(T-t) = 2\,\pi - \phi(t)$, essendo T il Periodo di Rivoluzione. Per questo motivo cercheremo di risolvere l'equazione di Keplero solo per la prima metà dell'orbita, corrispondente al moto tra il perielio ($\phi(t = 0) = 0$) e l'afelio ($\phi(t = T/2) = \pi$). Tracciamo il grafico della *trocoide* definita dalle eq.(50), ponendo sull'asse delle ascisse il tempo *relativo* al periodo di rivoluzione T, cioè il rapporto $t/T \equiv \mu/2\pi\ (\in [0,\,1])$. L'ordinata è invece ancora $y = 1 - \epsilon \cos\alpha$. A questo punto, facendo sempre riferimento alla curva di *Fig. 2* (che però, lo ripetiamo, si riferisce al caso specifico $\epsilon = 0.3$), i passi da seguire sono i seguenti:

1. Ad ogni dato istante $t\,(< \frac{T}{2})$, corrisponde un particolare punto sull'asse delle ascisse nella curva (50) mostrata in *Fig. 2*.
2. Dalla stessa *Fig. 2* si deduce quindi il valore dell'ordinata $y = 1 - \epsilon \cos\alpha$ che corrisponde a tale punto, e quindi a tale istante t, da cui possiamo determinare l'*Anomalia Eccentrica* attraverso la formula:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1-y}{\epsilon}\right)\,. \tag{51}$$

3. Possiamo infine determinare la posizione del pianeta all'istante considerato t attraverso l'*Anomalia Vera* ϕ, che in virtù dell'eq.(39) risulta essere data da:

$$\begin{cases} \phi = \arctan\left(\sqrt{1-\epsilon^2}\,\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha - \epsilon}\right), \quad (\text{se } \cos\alpha > \epsilon)\,, \\ \phi = \pi - \arctan\left(\sqrt{1-\epsilon^2}\,\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha - \epsilon}\right), \quad (\text{se } \cos\alpha < \epsilon)\,. \end{cases} \tag{52}$$

Per maggior chiarezza, diamo adesso un esempio numerico esplicito, ancora nel caso di una eccentricità $\epsilon = 0.3$, alla quale corrisponde difatti il grafico della curva *"trocoide"* riportato in *Fig. 2*, nel quale, come già detto, sulle ascisse sono riportati i tempi *relativi* t/T. Abbiamo scelto un valore relativamente alto dell'eccentricità ϵ, almeno rispetto a quelli tipici dei pianeti del Sistema Solare[11] perché fosse più evidente l'effetto della non-uniformità del moto lungo l'orbita.

Dividendo la prima metà del Periodo T in cinque parti uguali: $t_0 = 0$, $t_1 = T/10$, $t_2 = T/5$, $t_3 = 3\,T/10$, $t_4 = 2\,T/5$, $t_5 = T/2$, troviamo i seguenti risultati.

[10] Abbiamo trattato il moto di *puro rotolamento* a pag. 51 del nostro testo [3].
[11] I pianeti con le orbite più eccentriche sono Mercurio ($\epsilon = 0.2056$) e Plutone ($\epsilon = 0.2488$).

1. Preliminarmente verifichiamo che all'istante $t = 0$ il pianeta si trovi al perielio, con $\phi = 0$, essendo la nostra *"condizione iniziale"*. Ed infatti:

$$\frac{t_0}{T} = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_0 - \epsilon \sin\alpha_0 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_0 = 0 \;\Rightarrow\; y_0 = 1 - \epsilon = 1 - 0.3 = 0.7\,, \tag{53}$$

da cui, utilizzando le eq.(52), si ottiene la corrispondente *Anomalia Vera*:

$$\tan\phi_0 = 0 \;\Rightarrow\; \phi_0 = 0\,, \;\; \text{(q.e.d.)}. \tag{54}$$

2. Per $\frac{t_1}{T} = \frac{1}{10} = 0.1$, dal grafico della curva (*Fig. 2*) si osserva che a questo valore sull'asse delle ascisse corrisponde un valore $y_1 = 0.80$ sulle ordinate, dal quale si possono ricavare sia l'*Anomalia Eccentrica* μ_1 che quella *Vera* ϕ_1, come segue:

$$\frac{t_1}{T} = 0.1 \;\Rightarrow\; y_1 = 0.80 \;\Rightarrow\; \cos\alpha_1 = \frac{1 - y_1}{\epsilon} = 0.67 \;\; (> \epsilon) \;\Rightarrow\; \phi_1 = \arctan(1.94) = 63^\circ\,. \tag{55}$$

a conferma del fatto che il moto è più veloce vicino al perielio, come previsto dalla *Seconda Legge di Keplero*.

3. Allo stesso modo, per $\frac{t_2}{T} = \frac{2}{10} = 0.2$, dalla curva (*Fig. 2*) si osserva che $y_2 = 1.00$, da cui troviamo:

$$\frac{t_2}{T} = 0.2 \;\Rightarrow\; y_2 = 1.00 \;\Rightarrow\; \cos\alpha_2 = \frac{1 - y_2}{\epsilon} = 0 \;\; (< \epsilon) \;\Rightarrow\; \phi_2 = 180^\circ - \arctan(3.18) = 107^\circ\,. \tag{56}$$

4. A $\frac{t_3}{T} = \frac{3}{10} = 0.3$ vediamo che corrisponde una $y_3 = 1.17$, da cui si ottiene:

$$\frac{t_3}{T} = 0.3 \;\Rightarrow\; y_3 = 1.17 \;\Rightarrow\; \cos\alpha_3 = \frac{1 - y_3}{\epsilon} = -0.57 \;\; (< \epsilon) \;\Rightarrow\; \phi_3 = 180^\circ - \arctan(0.91) = 138^\circ\,. \tag{57}$$

5. Per $\frac{t_4}{T} = \frac{4}{10} = 0.4$ si trova che $y_4 = 1.26$, da cui:

$$\frac{t_4}{T} = 0.4 \;\Rightarrow\; y_4 = 1.26 \;\Rightarrow\; \cos\alpha_4 = \frac{1 - y_4}{\epsilon} = -0.87 \;\; (< \epsilon) \;\Rightarrow\; \phi_4 = 180^\circ - \arctan(0.41) = 158^\circ\,. \tag{58}$$

6. Infine, verifichiamo che all'istante $t_5 = T/2$ il pianeta si trova all'afelio, con $\phi_5 = 180^\circ$. Dalla *Fig. 2* vediamo che tale punto corrisponde al massimo della curva, in cui $y_5 = 1.30$. Con tale valore in effetti si ottiene:

$$\frac{t_5}{T} = 0.5 \;\Rightarrow\; y_5 = 1.30 \;\Rightarrow\; \cos\alpha_5 = \frac{1 - y_5}{\epsilon} = -1.00 \;\; (< \epsilon) \;\Rightarrow\; \phi_5 = 180^\circ - \arctan(0) \equiv 180^\circ\,, \tag{59}$$

come previsto, punto diametralmente opposto a quello occupato dal pianeta all'istante iniziale, quando si trovava al perielio.

Naturalmente, questo metodo *"grafico"* di risoluzione approssimata dell'equazione di Keplero può essere esteso suddividendo il periodo T dell'orbita in N intervalli di tempo uguali, per poter individuare la posizione del pianeta al generico istante $t_n = n\,T/N$, (con $n = 0, 1, 2, \ldots, N$), ed ottenendo quindi una descrizione quantitativa più precisa e dettagliata del moto del pianeta lungo la sua orbita. È sufficiente costruire la curva *"trocoide"* per il corretto valore dell'eccentricità dell'orbita del pianeta, che si assume noto, ed individuare il valore dell'ordinata y_n in corrispondenza di ciascun valore del tempo (*relativo* al Periodo T) t_n/T, determinare quindi il corrispondente

valore dell'*Eccentricità Eccentrica* α_n attraverso la formula $\cos\alpha_n = (1-y_n)/\epsilon$, col suo *seno* dato da: $\sin\alpha_n = \sqrt{1-\cos^2\alpha_n}\cdot\mathrm{sign}(\frac{T}{2}-t_n)$. L'ultimo fattore serve semplicemente a garantire che $\alpha\in[0,\pi]$ durante la prima metà dell'orbita (cioè per $t_n < T/2$), mentre $\alpha_n\in[\pi,\,2\pi]$ nella seconda metà (per $T/2 < t_n < T$). Sostituendo questi risultati nelle formule (52) si ottengono infine i valori dell'*Anomalia Vera* ϕ_n (facendo però attenzione al fatto che il $\mathrm{sign}(\sin\phi_n) = \mathrm{sign}(\sin\alpha_n)$), che individuano in modo preciso la posizione del pianeta sull'orbita a tale istante t_n.

3.2 Equazione di Keplero: metodo "numerico di Newton"

Concludiamo questo breve lavoro accennando ad un altro metodo di risoluzione approssimata dell'equazione di Keplero, basato sul metodo di risoluzione numerica di equazioni algebriche che si insegna ancora oggi nelle nostre scuole, e che prende per l'appunto il nome di *"Metodo di Newton"*. In effetti, lo stesso Newton nei *Principia* dichiara che, a causa della difficile descrizione della curva (la trocoide) utilizzata nel metodo grafico precedente, sarebbe preferibile affrontare il problema con metodi di approssimazione numerica.

Ricordiamo brevemente in cosa consiste il *"Metodo di Newton"*. Consideriamo la generica equazione algebrica $f(x)=0$, e cerchiamone le radici, ovvero gli *zeri* della stessa funzione $f(x)$. Supponendo che in prossimità della radice incognita $\bar{x}$ la funzione $f(x)$ sia continua, derivabile e (localmente) monotòna; senza perdita di generalità potremo così assumere che in un certo intorno di $\bar{x}$ si abbia $f'(x)>0$ (e che quindi sia localmente crescente). Attraverso lo studio del segno della stessa funzione $f(x)$ possiamo preliminarmente trovare un valore x_0 (tale che $f(x_0)>0$) che sia talmente vicino alla radice cercata $\bar{x}$, da potersi considerare come una *"prima approssimazione"* (in eccesso) della soluzione *vera* $\bar{x}$. L'equazione della retta tangente alla funzione nel punto $P_0(x_0\,;\,f(x_0))$ sarà:

$$f(x)-f(x_0) = f'(x_0)\,(x-x_0)\,. \tag{60}$$

L'ascissa del punto di intersezione di questa retta con l'asse delle x, detta x_1, data perciò da:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\,, \tag{61}$$

risulterà essere molto più vicina alla *vera* radice $\bar{x}$ (rispetto a x_0), e ne costituirà quindi una miglior approssimazione. Ripetendo di nuovo il procedimento più volte, possiamo ottenere una successione di valori x_n che si avvicineranno sempre più all'effettiva radice $\bar{x}$. Possiamo dare la formula per ottenere questi valori in modo iterativo:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,, \quad (n=0,\,1,\,2,\ldots). \tag{62}$$

Naturalmente, la vera soluzione dell'equazione $f(x)=0$ sarà data dal limite a cui tende questa successione:

$$\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n\,. \tag{63}$$

Il grosso vantaggio di questo noto metodo numerico è la sua grande *convergenza* verso il risultato, almeno rispetto al forse più semplice metodo della *"bisezione"*. In pratica, nella maggior parte dei casi, si ottengono già ottime approssimazioni con soli due *"steps"*, arrivando cioè al secondo termine della successione:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\,, \tag{64}$$

con x_1 dato dalla (61).

Dopo questa breve esposizione del noto *"Metodo di Newton"*, possiamo vedere come questo ci permette di trovare soluzioni approssimate dell'equazione di Keplero (44).

Si tratta di trovare le radici $\bar{\alpha}$ dell'equazione:

$$\alpha - \epsilon \sin \alpha = \mu \,, \tag{65}$$

per un dato valore fissato dell'*Anomalia Media* $\mu = 2\,\pi\,\frac{t}{T}$, ovvero per un dato istante t (con $0 < t < T$). Definendo quindi la funzione:

$$f(\alpha) = \alpha - \sin \alpha - \mu \,, \tag{66}$$

si tratta quindi di trovarne la radice $\bar{\alpha}$, per la quale $f(\bar{\alpha}) = 0$. Supponiamo dii essere in grado di *"ipotizzare"* un valore *iniziale* α_0 sufficientemente vicino alla radice cercata $\bar{\alpha}$. Una prima approssimazione è data allora dalla seguente formula:

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{f(\alpha_0)}{f'(\alpha_0)} = \alpha_0 - \frac{\alpha_0 - \sin \alpha_0 - \mu}{1 - \cos \alpha_0} \,. \tag{67}$$

Volendo ottenere una approssimazione ancora migliore possiamo proseguire, ottenendo al secondo *ordine*, l'espressione:

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} = \alpha_1 - \frac{\alpha_1 - \sin \alpha_1 - \mu}{1 - \cos \alpha_1} = \frac{\mu + \sin \alpha_1 - \alpha_1 \, \cos \alpha_1}{1 - \cos \alpha_1} \,, \tag{68}$$

con α_1 dato chiaramente dalla (67). In questo modo è possibile ottenere valori per l'*Anomalia Eccentrica* che risolvono l'equazione di Keplero col grado di approssimazione desiderato, a qualsiasi istante t (ovvero per qualsiasi valore dato dell'*Anomalia Media* μ). Da queste soluzioni approssimate si calcolano infine le *Anomalie Vere* ϕ, ancora attraverso le eq.(52), e queste sono sufficienti per individuare la posizione del pianeta in quel dato istante.

Per maggiori approfondimenti sull'applicazione di questo metodo alla risoluzione dell'equazione di Keplero, si rimanda alla estesa letteratura relativa allo studio dei *"Principia"* newtoniani, ed in particolare ai libri di Guicciardini [6], Chandrasekhar [7] e Pask [8]. Quest'ultimo in particolare, ci è stato utile anche per la nostra breve esposizione del metodo *"grafico"* discusso nel §3.1.

Riferimenti bibliografici

[1] Stefano Ranfone, *"Appunti sul Moto dei Corpi in un Campo Gravitazionale"*, (2018); URL: https://www.academia.edu/37567822/

[2] Stefano Ranfone, *"Alcune considerazioni su un modello del XVII secolo di Orbita Eccentrica della Terra vs. Orbita Ellittica Kepleriana"*, (2020); URL: https://www.academia.edu/42786955/

[3] Stefano Ranfone, *Complementi di Fisica*, Pisa, ETS, 2016.

[4] Isaac Newton, *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis* , Londra, 1687.

[5] Stefano Ranfone, *"Ulteriori considerazioni sulla trattazione degli Urti Elastici nel XVII-XVIII secolo: Keill, Wallis e Wren"*, (2020); URL: https://www.academia.edu/42332762/

[6] N. Guicciardini, *"Isaac Newton on mathematical certainty and method"*, Cambridge, MA, MIT Press, 2009.

[7] S. Chandrasekhar, *"Newton's Principia for the common reader"*, Oxford, Oxford University Press, 1995.

[8] Colin Pask, *"Magnificent Principia. Exploring Isaac Newton's Masterpiece"*, Amherst, New York, Prometheus Books, 2013.

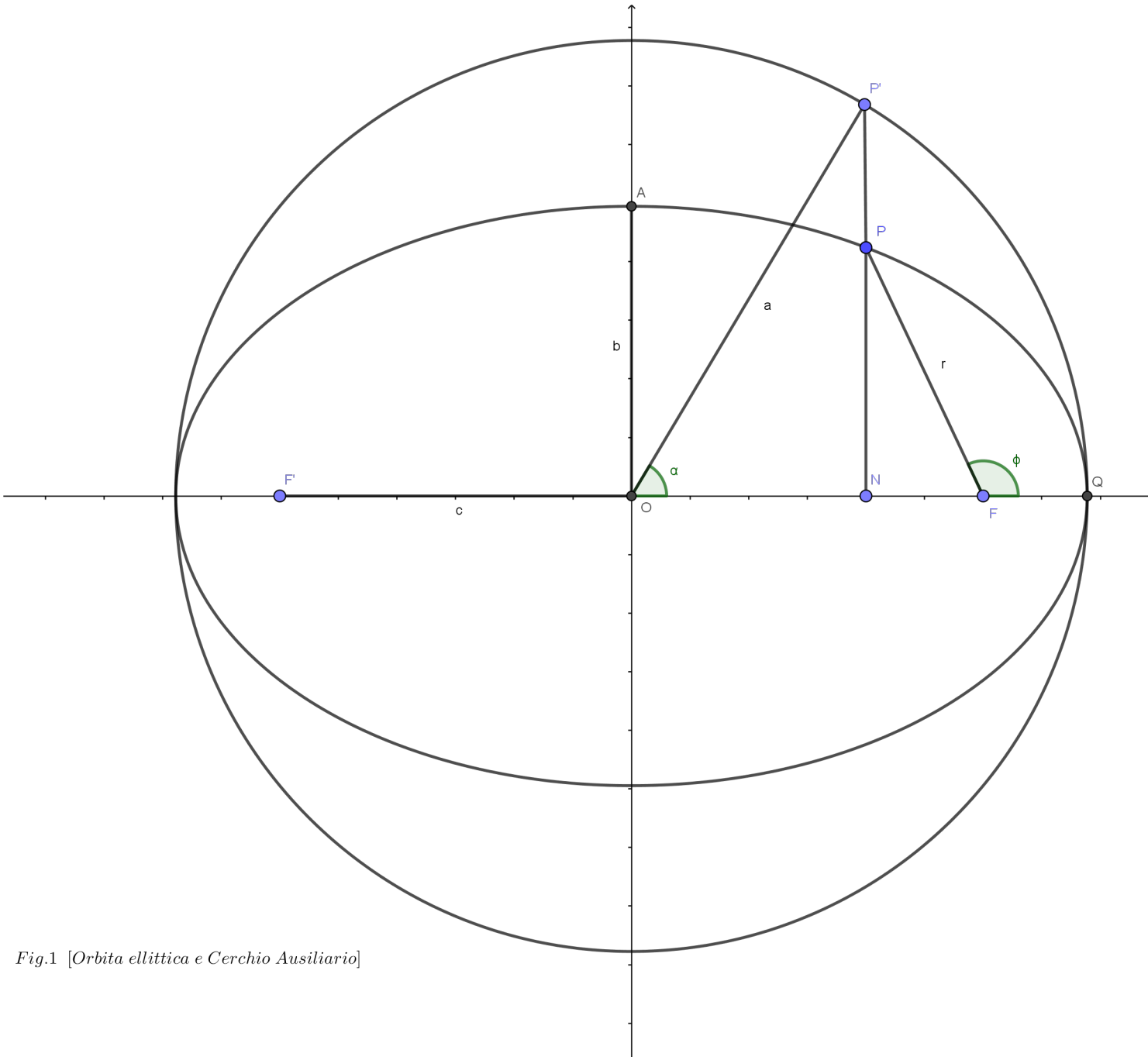

*Fig.*1 [*Orbita ellittica e Cerchio Ausiliario*]

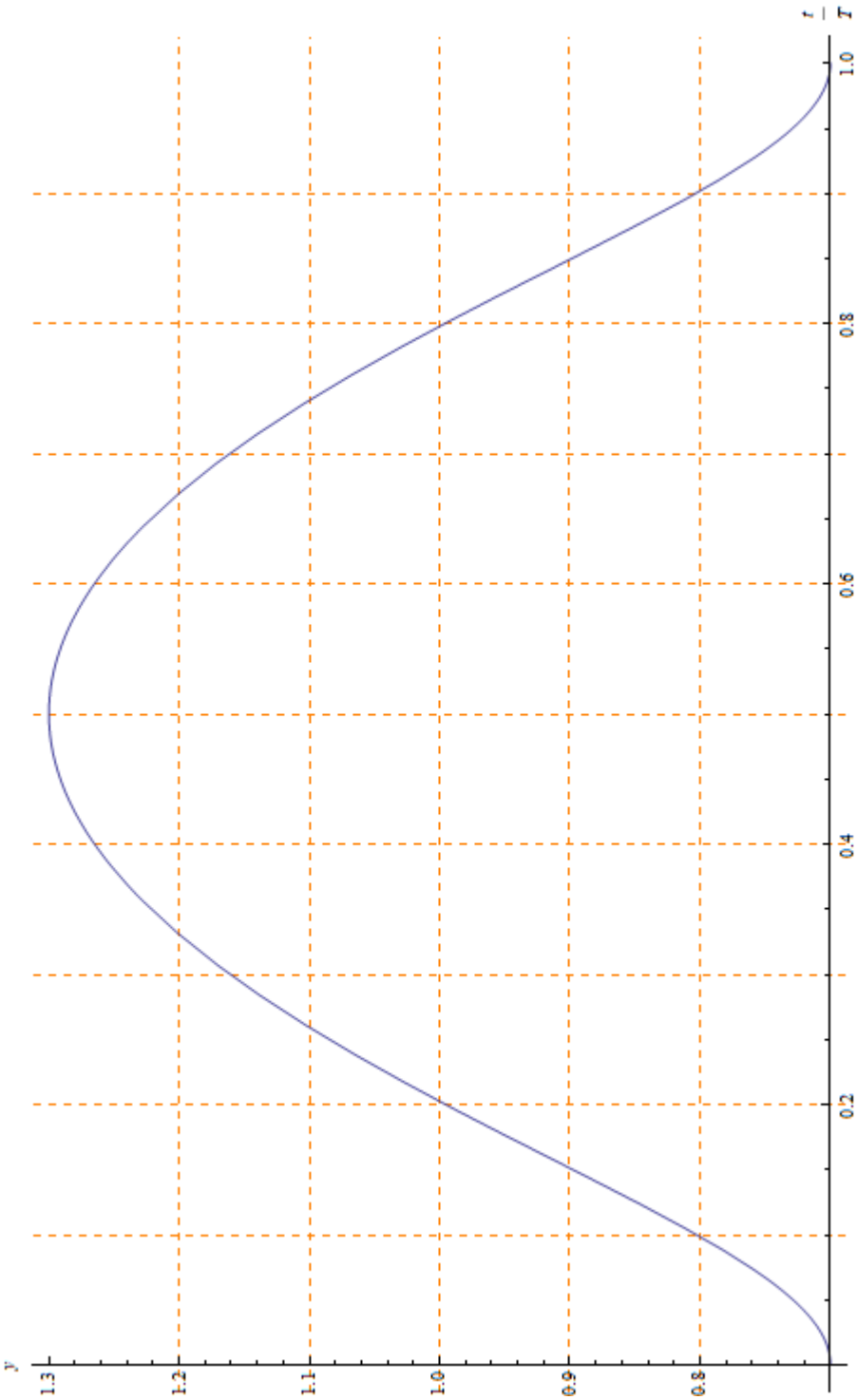

Fig. 2 [*La trocoide.* ($\epsilon = 0.3$).]