

# Una dimostrazione alternativa “Geometrica” della Legge dell’Inverso del Quadrato della Distanza per la Forza Gravitazionale ispirata dallo stesso Newton e da Maclaurin

Stefano Ranfone \*

## Abstract

*Keywords: Fisica, Newton, Gravitazione.*

*In queste brevi Note, essenzialmente a scopi didattici, vogliamo presentare una dimostrazione della ben nota “Legge dell’Inverso del Quadrato della Distanza” della Gravità Newtoniana, basata essenzialmente su argomenti “Geometrici”, dimostrazione suggerita dallo stesso Newton e da Colin Maclaurin nella sua esposizione della filosofia del Genio inglese. Nell’ultima parte, a completamento di quanto esposto in precedenti lavori, presentiamo infine un ulteriore esempio di “Problema Inverso”, in cui mostriamo come si possano avere orbite ellittiche anche nel caso di forze centrali di tipo “elastico” dirette verso il loro proprio centro di simmetria.*

*[In these brief Notes, essentially for didactical purposes, we wish to present a proof of the well known “Inverse-squared Law for Gravity”, but based only upon “Geometrical” arguments, as suggested by Newton him-self, as well as by Maclaurin in his exposition of the Newtonian Philosophy. In the last part of the paper, at last, we give a further example of the so-called “Inverse Problem”, in which is shown how elliptical orbits may also be obtained in presence of central elastic forces directed towards their own centre of symmetry.]*

Vogliamo qui riproporre, essenzialmente per scopi didattici, una dimostrazione basata per lo più su argomenti geometrici e suggerita dallo stesso Newton [1] nei suoi “Principia Mathematica Philosophiae Naturalis” e da Maclaurin [2] nella sua esposizione della Filosofia newtoniana<sup>1</sup>, della ben nota Legge secondo la quale la forza attrattiva responsabile del moto ellittico dei pianeti risulta essere inversamente porporzionale al quadrato della loro distanza dal Sole.

Si tratta quindi di risolvere, come diciamo oggi, il relativo “Problema Inverso”<sup>2</sup>, ovvero quello di cercare il tipo di Forza attrattiva (centripeta) diretta verso uno dei fuochi, dove è posto il Sole, responsabile delle osservate orbite ellittiche planetarie. Questo è ciò che costituisce la “PROPOSIZIONE XI - PROBLEMA VI” del LIBRO I dei “Principia” di Newton [1], nella quale l’Autore deduce per via geometrica che tale forza risulta essere inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Noi abbiamo già fornito una tale dimostrazione, ma basata su metodi analitici più moderni, in un precedente lavoro [3], con una trattazione simile a quella presentata anche in altri testi (si veda, per esempio, [6], [7]).

---

\*email: sranfone@gmail.com ; www.stefano-ranfone.it

<sup>1</sup>Maclaurin espone questa dimostrazione al punto 10 del *Libro III*, a pag. 251 della sua Prima Edizione [2] stampata a Londra nel 1748; se ne veda in particolare la *Fig. 53*, dalla quale è stata derivata la nostra *Fig. 1*.

<sup>2</sup>Ai tempi di Newton, e per tutto il Settecento, in realtà questo veniva detto “Problema Diretto”; al contrario, il problema di trovare l’equazione delle traiettorie dei corpi soggetti a forze assegnate veniva definito “Problema Inverso”. Successivamente si è preferito invertire questa dicitura.

Consideriamo perciò la traiettoria ellittica di un pianeta, come quella rappresentata in *Fig. 1*, la cui equazione cartesiana è data da:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{(y - a)^2}{a^2} = 1. \quad (1)$$

Il Sole sia posto nel *fuoco*  $S(0; a + c)$ , il *perielio* nel punto  $P(0; 2a)$ , l'*afelio* in  $A(0; 0)$  e gli altri due vertici in  $B(b; a)$  e in  $D(-b; a)$ . Siano inoltre  $\mathbf{v}_P$  e  $\mathbf{v}_A$  le velocità del pianeta in  $P$  e in  $A$ , rispettivamente.

Come noto, la centralità della forza attrattiva verso il Sole in  $S$  implica la conservazione del Momento Angolare; ripetendo quanto già esposto in precedenti lavori[5],[4],[3], detto  $\overline{\mathbf{ST}} \equiv \mathbf{r}$  il generico raggio vettore del pianeta  $T$  rispetto al Sole  $S$ , ed  $F(r)$  il modulo della forza attrattiva cercata, dalla Seconda Equazione Cardinale della Dinamica troviamo che:

$$\frac{d\mathbf{L}_S}{dt} = \mathbf{M}_S = \overline{\mathbf{ST}} \wedge \mathbf{F} = -\mathbf{r} \wedge \hat{\mathbf{r}} F(r) = 0, \quad (2)$$

da cui si evince infatti la Conservazione del Momento Angolare:

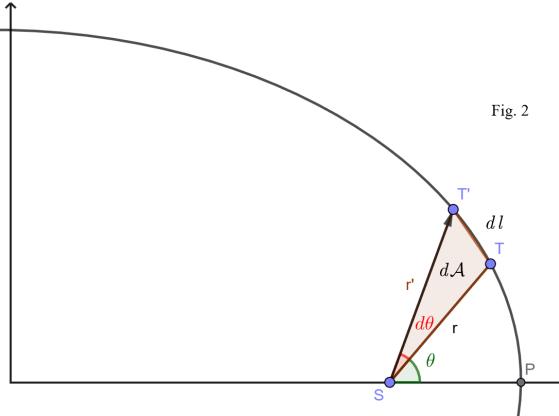
$$\mathbf{L}_S = \overline{\mathbf{ST}} \wedge m \mathbf{V}_T = \mathbf{r} \wedge m (\dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\theta} \hat{\theta}) = m r^2 \dot{\theta} \hat{\mathbf{k}} = \text{costante}, \quad (3)$$

essendo  $m$  la massa del pianeta  $T$  e dove abbiamo utilizzato le consuete notazioni [5], indicando con  $\dot{\theta}$  la velocità angolare e con  $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{r}} \wedge \hat{\theta}$  il versore perpendicolare al piano dell'orbita. Ciò implica la planarità delle traiettorie e porta direttamente alla ben nota “Seconda Legge di Keplero”, ovvero alla cosiddetta *Legge delle Aree*, secondo la quale il raggio vettore di ogni pianeta  $\overline{\mathbf{ST}}$  “spazza” sempre aree uguali in tempi uguali. Fatto che è equivalente ad avere una *Velocità Areolare* che resta invariata durante il moto. In effetti, come si evince dalla *Fig. 2*, l'area infinitesima  $d\mathcal{A}$  spazzata in un tempo infinitesimo  $dt$  è, al primo ordine, data da:

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2} r dl = \frac{1}{2} r (r d\theta) = \frac{r^2}{2} \dot{\theta} dt, \quad (4)$$

da cui si ottiene infatti una “*Velocità Areolare*” costante:

$$\dot{\mathcal{A}} = \frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{L_S}{2m} = \text{costante}. \quad (5)$$



Applicando per esempio la Conservazione del Momento Angolare al perielio  $P$  e all'afelio  $A$  si trova che:

$$L_S = m r_A V_A = m r_P V_P , \quad (6)$$

da cui segue che:

$$\frac{V_P}{V_A} = \frac{r_A}{r_P} . \quad (7)$$

A questo punto, facendo di nuovo riferimento alla *Fig. 1*, consideriamo lo spostamento avvenuto in un tempo infinitesimo  $\delta t$ , sia in prossimità del perielio  $P$  che dell'afelio  $A$ , che porterà il pianeta  $T$ , rispettivamente, nei punti  $N$  ed  $M$  dell'ellisse. Naturalmente, qualora non ci fosse stata alcuna attrazione verso il Sole  $S$ , il pianeta avrebbe proceduto il suo moto tangenzialmente con velocità costanti, portandosi rispettivamente nei punti  $K$  ed  $H$ , tali che  $PK = V_P \delta t$  e  $AH = V_A \delta t$ . Ciò significa, evidentemente, che le “cadute” verso il Sole  $S$ , rappresentate dai segmenti  $KN$  e  $HM$ , sono proprio attribuibili a tale forza attrattiva, che in prima approssimazione può essere considerata costante durante tali spostamenti infinitesimi, proprio in virtù della particolarità dei punti di perielio  $P$  e di afelio  $A$ , per i quali al primo ordine  $\delta r = 0$  (essendo punti di *estremo* per  $r$ ). Di conseguenza, potendo perciò assumere semplici moti uniformemente accelerati, scriviamo questi spostamenti come:

$$KN = \frac{F_P}{2m} \delta t^2 , \quad HM = \frac{F_A}{2m} \delta t^2 , \quad (8)$$

dove abbiamo indicato con  $F_P$  ed  $F_A$  il valore della forza attrattiva nei rispettivi punti. A questo punto, partendo dall'afelio  $A$  tracciamo un arco (infinitesimo)  $Am$  congruente a quello percorso nello stesso tempo  $\delta t$ , ma partendo dal perielio  $P$ , cioè tale che  $Am = PN$ . Poichè la “curvatura” dell'ellisse è, per simmetria, la stessa in  $P$  e in  $A$ , ne consegue allora che anche  $Ah = PK$  e  $hm = KN$ , con entrambi  $hm$  ed  $HM$  che possono considerarsi in prima approssimazione paralleli all'asse degli Absidi  $AP$ . Di conseguenza possiamo anche scrivere che:

$$hm = KN = \frac{F_P}{2m} \delta t^2 . \quad (9)$$

Inoltre, dalla Conservazione del Momento Angolare espresso dalle eq.(6) e (7), troviamo che:

$$\frac{PK}{AH} = \frac{V_P \delta t}{V_A \delta t} = \frac{V_P}{V_A} = \frac{r_A}{r_P} . \quad (10)$$

Dalle due eq.(8) possiamo allora ottenere il rapporto tra i moduli della forza attrattiva al perielio  $P$  e all'afelio  $A$ :

$$\frac{hm}{HM} = \frac{KN}{HM} = \frac{\frac{F_P}{2m} \delta t^2}{\frac{F_A}{2m} \delta t^2} = \frac{F_P}{F_A} . \quad (11)$$

Ma, facendo riferimento alla *Fig. 1*, vediamo che  $hm$  e  $HM$  non sono altro che le *ordinate* (inferiori)  $y$  che corrispondono rispettivamente alle *ascisse*  $x_h = Ah$  e  $x_H = AH$ , ottenibili dall'eq. cartesiana (1) dell'ellisse, nell'ipotesi  $|x| \ll b$ , avendo considerato spostamenti dagli absidi  $A$  e  $P$  avvenuti in tempi infinitesimi  $\delta t$ , ipotesi fondamentale per poter giustificare l'assunzione secondo la quale tutte le forze attrattive (in  $H$ , come in  $h$ , ovvero in  $K$ ) sono parallele tra loro e parallele allo stesso asse degli absidi  $AP$ . Scriviamoci dunque la funzione che corrisponde alla parte *inferiore* della curva. Dall'eq.(1) troviamo che questa è data da:

$$y(x) = a \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}} \right]. \quad (12)$$

Nell'ipotesi  $|x| \ll b$ , dallo sviluppo di Taylor di questa funzione<sup>3</sup> si ottiene:

$$y(x) \simeq a \left[ 1 - \left( 1 - \frac{x^2}{2b^2} \right) \right] \simeq \frac{a}{2b^2} x^2, \quad (13)$$

suggerendo che in prossimità dei vertici l'ellisse è approssimabile ad una parabola. Utilizzando questo risultato nell'eq.(11) troviamo quindi che:

$$\frac{F_P}{F_A} = \frac{hm}{HM} = \left( \frac{Ah}{AH} \right)^2, \quad (14)$$

ovvero, in virtù dell'eq.(7), ed essendo  $Ah = PK = V_P \delta t$ , e  $AH = V_A \delta t$ , otteniamo infine:

$$\frac{F_P}{F_A} = \left( \frac{V_P \delta t}{V_A \delta t} \right)^2 = \left( \frac{V_P}{V_A} \right)^2 = \left( \frac{r_A}{r_P} \right)^2. \quad (15)$$

Questo risultato dimostra in effetti quanto si voleva, ovvero che nel caso di orbite ellittiche col centro di attrazione (il Sole) posto in uno dei *fuochi*, il modulo della forza a cui è soggetto il pianeta  $T$  deve necessariamente essere inversamente proporzionale al quadrato della distanza, come espresso dalla ben nota Formula della Gravitazione Universale di Newton:

$$\mathbf{F}_G = -\hat{\mathbf{r}} \frac{G M_S m_T}{r^2}. \quad (16)$$

Si confronti il metodo “geometrico” qui presentato, essenzialmente suggerito da Maclaurin nella sua esposizione [2] della Filosofia Newtoniana, col metodo “analitico” da noi già presentato in [3]. In tale lavoro, si dimostrava che la *Forza Centrale* associata ad una traiettoria (necessariamente piana) descritta in coordinate polari  $(r, \theta)$  rispetto al *Centro Attrattore*  $O$  da un'equazione del tipo  $r(\theta)$ , è data dalla formula:

$$F(r) = \frac{L_O^2}{m} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r^2} r' \right) - \frac{1}{r^3} \right], \quad (17)$$

dove  $r' = \frac{dr}{d\theta}$ . Tale Formula veniva applicata sia al caso esaminato per via *Geometrica* nella prima parte del presente lavoro, ovvero al caso delle orbite ellittiche dei pianeti attratti dal Sole posto in uno dei fuochi, che al caso di traiettorie a spirale del tipo  $r(\theta) = r_0 e^\theta$ . Qui, a conclusione di questo lavoro, desideriamo trattare un terzo caso, interessante anche semplicemente come *Esercizio Didattico* per i nostri studenti. Vogliamo cioè determinare il tipo di forza attrattiva responsabile di traiettorie ancora ellittiche, ma nelle quali il centro attrattore sia il centro di simmetria dell'ellisse, anziché uno dei fuochi come nel caso della Gravitazione Newtoniana.

Per poter applicare la formula (17) a tale caso occorre esprimere in coordinate polari  $(r, \theta)$  (riferite rispetto al centro di simmetria  $O$ ) l'equazione *Canonica* dell'ellisse:

---

<sup>3</sup>Si applica qui lo sviluppo fino al primo ordine in  $x$ :  $(1 \pm x)^\alpha \simeq 1 \pm \alpha x$ ; si vedano, per esempio, i nostri “Complementi di Analisi Matematica” [8].

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (18)$$

con  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ ; dopo un po' di algebra ed esplicitando la coordinata radiale  $r$ , si trova:

$$r = \frac{a}{\sqrt{1 + \Gamma \sin^2 \theta}}, \quad (19)$$

dove per semplicità si è posto  $\Gamma = (c/b)^2 = (a/b)^2 - 1$ , essendo  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  la distanza di ciascuno dei fuochi dal centro di simmetria dell'ellisse. Per derivazione rispetto a  $\theta$  troviamo che:

$$\frac{r'}{r^2} = -\frac{\Gamma \sin \theta \cos \theta}{a \sqrt{1 + \Gamma \sin^2 \theta}}, \quad (20)$$

da cui, derivando di nuovo, si ottiene:

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{r'}{r^2} \right) = -\frac{\Gamma (1 - 2 \sin^2 \theta - \Gamma \sin^4 \theta)}{a (1 + \Gamma \sin^2 \theta)^{3/2}}, \quad (21)$$

ciò ci permette di scrivere che:

$$\left[ \frac{d}{d\theta} \left( \frac{r'}{r^2} \right) - \frac{1}{r} \right] \frac{1}{r^2} = -\left( \frac{1 + \Gamma}{a^3} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \Gamma \sin^2 \theta}} = -\left( \frac{1 + \Gamma}{a^4} \right) r. \quad (22)$$

Utilizzando questo risultato nell'eq.(17), ed esplicitando  $\Gamma$  in termini dei parametri dell'ellisse, si ottiene in definitiva:

$$F(r) = -\frac{1}{m} \left( \frac{L_O}{a b} \right)^2 r \equiv -K r, \quad (23)$$

indicando che una Forza attrattiva diretta verso il centro di simmetria di tipo *lineare*, come quella *elastica* descritta dalla *Legge di Hooke*, porta ancora ad orbite ellittiche, ma naturalmente descritte da leggi orarie ben diverse da quelle caratteristiche del moto dei pianeti soggetti alla Forza di Gravitazione Universale Newtoniana (16).

## Riferimenti bibliografici

- [1] Isaac Newton, *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*, Londra, 1687.
- [2] Colin Maclaurin, *An Account of Sir Isaac Newton's Philosophical Discoveries*, Londra, 1748.
- [3] Stefano Ranfone, *Moti centrali ed equazione di Keplero. Excursus nei "Principia" di Newton*, (2020); URL: <https://www.researchgate.net/doi/10.13140/RG.2.2.11589.47849>
- [4] Stefano Ranfone, "Appunti sul Moto dei Corpi in un Campo Gravitazionale", (2018); URL: <https://www.academia.edu/37567822/>
- [5] Stefano Ranfone, *Complementi di Fisica*, Pisa, ETS, 2016.

- [6] S. Chandrasekhar, “*Newton’s Principia for the common reader*”, Oxford, Oxford University Press, 1995.
- [7] Colin Pask, “*Magnificent Principia. Exploring Isaac Newton’s Masterpiece*”, Amherst, New York, Prometheus Books, 2013.
- [8] Stefano Ranfone, “*Complementi di Analisi Matematica*”, (2014); URL: <https://www.academia.edu/9220851/>

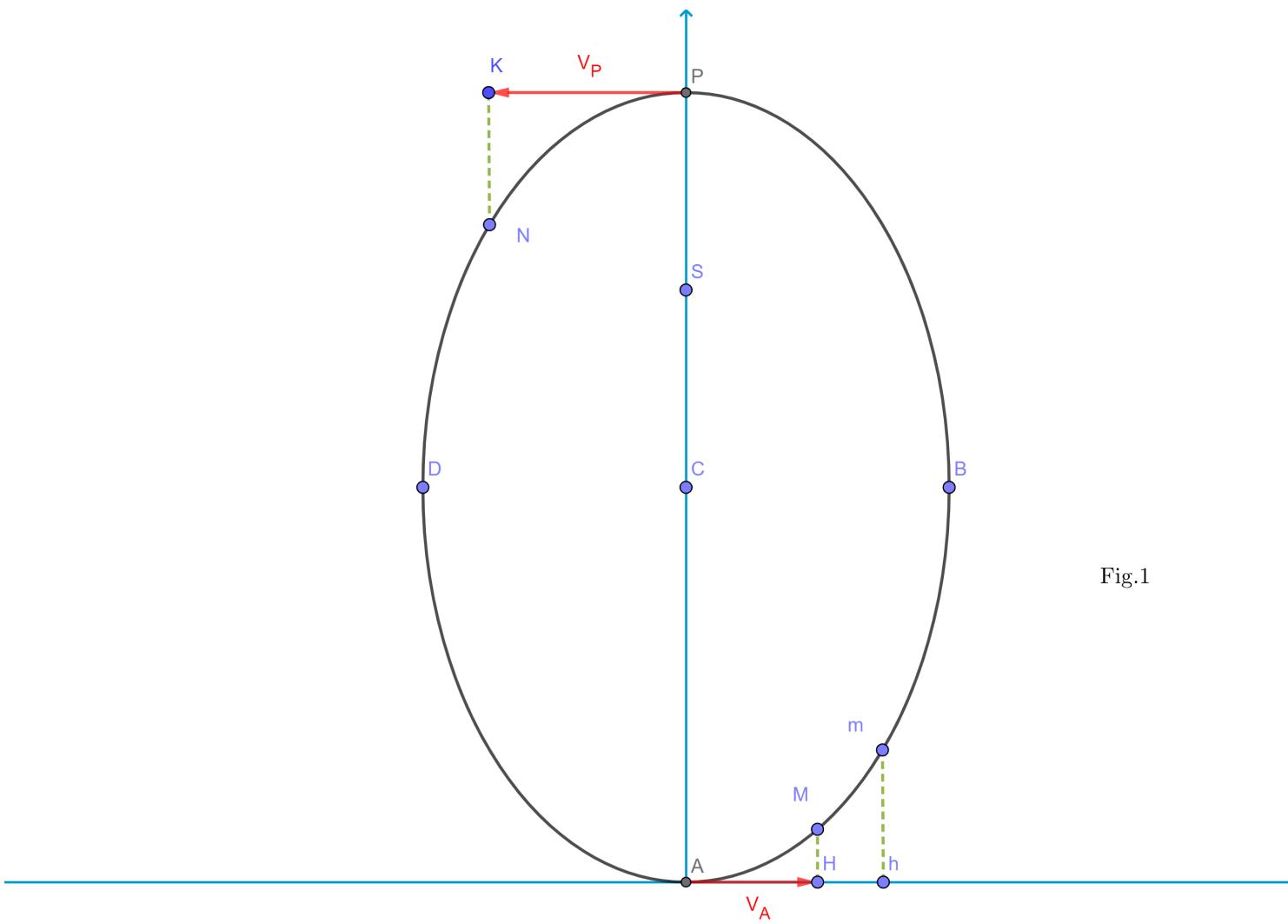


Fig.1