

Complementi di Fisica

Stefano Ranfone ¹

¹url: www.stefano-ranfone.it ; email: sranfone@alice.it

Indice

0.1	Prefazione dell'Autore	6
0.2	Introduzione	7
1	Meccanica (parte I): Cinematica	9
1.1	Introduzione e Definizioni	9
1.1.1	Esempio	12
1.1.2	Esercizio	13
1.2	Il Moto del Proiettile	13
1.3	Il Moto Circolare Uniforme	15
1.4	Il Moto Armonico	16
2	Meccanica (parte II): Statica e Dinamica	17
2.1	Le Leggi della Dinamica di Newton	17
2.2	Sistemi Non-Inerziali e Forze d'Inerzia	19
2.2.1	Esempio: La Caduta dei Gravi (<i>Prima Parte</i>)	22
2.2.2	Esempio: La Caduta dei Gravi (<i>Approfondimento</i>)	25
2.3	Statica	28
2.3.1	Esercizio	29
2.4	Dinamica dei Sistemi di punti materiali	31
2.4.1	Sistemi a Massa Variabile: il Moto del Razzo	33
2.5	Impulso e Quantità di Moto	34
2.6	Lavoro ed Energia	35
2.6.1	Forze Conservative ed Energia Potenziale	36
2.6.2	Conservazione dell'Energia Meccanica	38
2.6.3	Energia Potenziale ed Equilibrio	39
2.6.4	Esercizio	40
2.7	Fase Impulsiva ed Urti	42
2.7.1	Le Equazioni Cardinali in Fase Impulsiva	42
2.7.2	Gli Urti	43
2.8	Dinamica dei Sistemi Rigidi	44
2.8.1	Esempi di Momenti d'Inerzia	46
2.8.2	Teorema di Huygens-Steiner e Teorema di König	47
2.8.3	Esercizio	48
2.8.4	Rotolamento puro	51

2.8.5	Esempio: Puro Rotolamento di un cilindro su un piano inclinato	52
2.8.6	Esercizio	54
2.9	Forze centrali, Gravitazione e Leggi di Keplero	55
2.9.1	Ulteriori Considerazioni sulla Gravità Terrestre	58
2.9.2	La Terza Legge di Keplero (per orbite circolari)	60
2.9.3	Velocità di Fuga da un pianeta	61
2.9.4	Problema dei Due Corpi e Massa Ridotta	61
2.9.5	Esempio: Sistema di Stelle Doppie	62
2.10	Appendice: Schema (Generale) di Risoluzione di un Problema di Meccanica	63
3	Termologia	65
3.1	Introduzione. Temperatura e Calore	65
3.2	Le Leggi Fondamentali della Termologia	66
3.2.1	Equilibrio Termico	67
3.2.2	Esempio	68
3.3	Trasmissione del Calore: Conduzione, Convezione ed Irraggiamento	69
3.3.1	Conduzione Termica	69
3.3.2	Esercizio	70
3.3.3	Esercizio (Sulla formazione di uno strato di ghiaccio) . . .	71
3.3.4	Convezione Termica	72
3.3.5	Esempio	73
3.3.6	Irraggiamento	74
3.3.7	Esercizio	75
3.3.8	Esercizio [Fisica Generale 1 per Ing. Mecc., Univ. Pisa; (13/1/2014)]	76
4	Termodinamica	79
4.1	I Gas Perfetti	80
4.1.1	Cenni sulla Teoria Cinetica dei Gas	80
4.1.2	Il Primo Principio della Termodinamica	82
4.1.3	Trasformazioni Termodinamiche elementari	84
4.1.4	Trasformazioni Politropiche	87
4.2	Ciclo di Carnot ed Entropia	88
4.3	Il Secondo Principio della Termodinamica	91
4.3.1	Esempio	93
4.4	Sull'Entropia e le Macchine Termiche	94
4.5	Esercizi Risolti di Termodinamica	96
4.5.1	Esercizio (Rendimento di un Ciclo termodinamico)	96
4.5.2	Esercizio (Ciclo con trasformazione lineare)	98
4.5.3	Esercizio (sull'Entropia)	99
4.5.4	Esercizio (Oscillazioni di un pistone)	100
4.5.5	Esercizio (sulla Mongolfiera) [Univ. Pisa; Ing. (2015)] . .	101
4.5.6	Esercizio (sulle Macchine Termiche)	103
4.5.7	Esercizio	104

4.5.8	Esercizio	105
5	Complementi di Elettromagnetismo	107
5.1	Introduzione	107
5.2	Elementi di Algebra e Analisi Vettoriale	108
5.3	Forza di Coulomb e Forza di Newton: analogie e differenze	115
5.4	Il Campo Elettrico	117
5.4.1	Esercizio	118
5.4.2	Il Potenziale elettrico	119
5.5	Teorema di Gauss e sue applicazioni	120
5.5.1	Esempio 1: Campo elettrico per un cavo coassiale	121
5.5.2	Esempio 2: Campo elettrico per un atomo di idrogeno	122
5.5.3	Energia immagazzinata nel Campo Elettrico	123
5.6	Espansione in Multipoli e Dipolo Elettrico	124
5.7	L'elettrostatica dei Conduttori	126
5.7.1	Esempio: Capacità di un Condensatore Cilindrico	128
5.8	Conduzione elettrica e Leggi di Ohm	129
5.9	Il Campo magnetico	132
5.9.1	Esempio: Spira circolare percorsa da corrente e "Momento Magnetico"	135
5.9.2	Esercizio: Superficie sferica uniformemente carica in rotazione uniforme	136
5.9.3	Corrente di Spostamento e Terza equazione di Maxwell	137
5.10	Induzione Elettromagnetica e Quarta equazione di Maxwell	138
5.11	Equazioni di Maxwell nel vuoto e Onde Elettromagnetiche	139
5.12	Energia Elettromagnetica e Teorema di Poynting	142
6	Elementi di Fisica Quantistica	145
6.1	Introduzione	145
6.2	Lo Spettro del Corpo Nero	145
6.3	La Legge di Dulong-Petit	148
6.4	La Teoria Quantistica dell'Irraggiamento	148
6.5	Teoria dei Quanti e Calore Specifico dei solidi	151
6.6	Stabilità atomica e Modelli Atomici di Thomson e Bohr	153
6.7	L'Effetto Fotoelettrico	157
6.8	L'Effetto Compton	158
6.9	Onde di de Broglie ed equazione di Schrödinger	160
6.10	Applicazioni dell'equazione di Schrödinger	165
6.10.1	Particella in orbita circolare	165
6.10.2	Particella in una buca di potenziale infinita	166
6.10.3	Particella in una scatola tridimensionale	167
6.10.4	Barriera di potenziale ed Effetto Tunnel	168

0.1 Prefazione dell'Autore

Come indica il titolo stesso: “*Complementi*” di *Fisica*, il presente libro non è pensato per essere utilizzato come *unico* testo in sostituzione di quello adottato, indipendentemente dal Corso. Può piuttosto servire da *complemento* - o completamento - del Testo, utile per qualche approfondimento specifico di alcuni argomenti, oppure per un rapido ripasso durante la preparazione di un Esame Universitario di *Fisica Generale*. Le varie parti sono trattate in modo da essere per lo più indipendenti tra loro, per cui si ritiene che il libro possa anche essere utile come supporto per un Corso Avanzato di Fisica di un Liceo Scientifico. Abbiamo incluso anche un certo numero di esempi ed esercizi svolti che possono chiarire ulteriormente quanto esposto nel testo.

0.2 Introduzione

Lo scopo della Fisica è la comprensione di tutti i fenomeni naturali, attraverso un insieme di leggi matematiche capaci di darne una descrizione quantitativa, descrizione che richiede l'introduzione di grandezze quantificabili tramite il confronto con corrispondenti quantità prese come riferimento, dette "unità di misura". Naturalmente, vista l'infinità dei fenomeni naturali, ci aspettiamo di dover utilizzare un numero altrettanto grande sia di "grandezze fisiche" che di unità di misura. Fortunatamente risulta che solo sette sono veramente *fondamentali*, tutte le altre essendo esprimibili come loro combinazioni. Queste "grandezze fondamentali", con le relative unità di misura espresse nel cosiddetto *Sistema Internazionale* (S.I.) sono riportate nella seguente tabella:

Grandezza	Simbolo	Unità di misura (nel S.I.)
Lunghezza	L	metro (m)
Massa	M	chilogrammo (kg)
Tempo	t	secondo (s)
Intensità di corrente	I	Ampere (A)
Temperatura	T	Kelvin (K)
Intensità luminosa	I_l	candela (cd)
Quantità di materia	n (Q_m)	mole (mol)

Per esempio, una *velocità* è: $v \sim [L t^{-1}] \sim m/s$; un'*accelerazione*: $a \sim [L t^{-2}] \sim m/s^2$; una *forza*: $F \sim m a \sim [M L t^{-2}] \sim kg m/s^2 \equiv N$ (Newton); un'*energia* (o un *lavoro*): $L \sim F l \sim [M L^2 t^{-2}] \sim Nm \equiv J$ (Joule); una *potenza*: $P \sim L/t \sim [M L^2 t^{-3}] \sim J/s \equiv W$ (Watt); una *pressione*: $p \sim F/S \sim [M L^{-1} t^{-2}] \sim N/m^2 \equiv Pa$ (Pascal); ma anche una *carica elettrica*: $q \sim I t \sim [I t] \sim A s \equiv C$ (Coulomb), o una *differenza di potenziale elettrico*: $V \sim L/q \sim [M L^2 t^{-3} I^{-1}] \sim J/C \equiv V$ (Volt), e così via.

Le grandezze fisiche, almeno nell'ambito della *Fisica Generale*¹, si differenziano in "scalari" e "vettoriali". Quelle scalari sono completamente descritte da una sola quantità, come il tempo, la massa e la temperatura. Le grandezze vettoriali, invece, necessitano di più informazioni, come l'*intensità*, la *direzione* e il *verso* del vettore ad esse associato; ovvero, più semplicemente, di una *terna* di quantità, corrispondente alle tre "componenti" del vettore stesso², riferite rispetto ad un qualche sistema di assi cartesiani $O(x, y, z)$.

Nei corsi di *Fisica Generale*, solitamente si usa suddividere la fisica nelle seguenti parti:

- Meccanica;
- Termologia e Termodinamica;

¹Nei corsi di Fisica più avanzati, è necessario introdurre anche grandezze più complesse, come quelle *tensoriali*.

²Daremo una sommaria trattazione di Algebra e Analisi Vettoriale nel §5.2, all'inizio del capitolo dedicato all'Elettromagnetismo.

- Onde, Oscillazioni e Ottica;
- Elettromagnetismo;
- (Cenni di) Fisica moderna: Elementi di Fisica Quantistica e di Teoria della Relatività (Ristretta).

Qui non ci occuperemo né della parte relativa alle *Onde, Oscillazioni e Ottica*, né di *Relatività*. Tratteremo altresì di *Meccanica* (nei primi due capitoli), di *Termologia e Termodinamica* (capitoli 3 e 4), di *Elettromagnetismo* (capitolo 5) e infine, nell'ultimo capitolo, discuteremo alcuni aspetti di *Fisica Quantistica*, limitando naturalmente la trattazione a un livello sufficientemente elementare.

Capitolo 1

Meccanica (parte I): Cinematica

1.1 Introduzione e Definizioni

In questi primi due capitoli ci occuperemo della “Meccanica”, che è la branca della fisica che si occupa dello studio dei corpi “mobili” (sia che siano in moto oppure in quiete). Essa è divisibile in tre parti distinte:

1. la “Cinematica”: è la parte che si *accontenta* della sola *descrizione* dei moti, senza occuparsi delle cause che li hanno prodotti;
2. la “Statica”: che studia l'*equilibrio* dei corpi, studiandone le cause (tipicamente, le forze agenti sul sistema);
3. la “Dinamica”: sicuramente la parte principale di tutta la Meccanica, che studia il moto dei corpi (gli *effetti*) a partire dalle *cause* (di nuovo, tipicamente, le forze).

Concordemente con quanto viene fatto nella maggior parte dei testi, anche qui inizieremo la nostra trattazione dalla Cinematica. Come già detto, la cinematica tratta essenzialmente della *descrizione* del moto dei corpi. Per il momento, considereremo soltanto il moto di semplici “punti materiali”, cioè sistemi le cui dimensioni e struttura interna non hanno alcun ruolo significativo per lo studio che ci interessa.

Fissata una terna cartesiana $O(x, y, z)$, la posizione di un punto materiale P nello spazio è determinata da una terna di coordinate $P(x_P, y_P, z_P)$, ovvero da un *raggio vettore* $\vec{OP} \equiv \mathbf{r}_P = \hat{\mathbf{i}}x_P + \hat{\mathbf{j}}y_P + \hat{\mathbf{k}}z_P$, essendo O l'*origine* della terna cartesiana scelta, ed $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ i *versori* (vettori unitari) diretti nella direzione degli assi x, y, z , rispettivamente. Istante per istante il punto materiale potrà occupare posizioni diverse nello spazio. Quindi il suo raggio vettore sarà una

certa funzione del tempo: $\mathbf{r}(t)$, detta *Legge Oraria* o *Legge del Moto*, equivalente alle seguenti tre equazioni scalari:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad (1.1)$$

che costituiscono l'equazione della traiettoria (in forma parametrica). Per ottenere la sua espressione *cartesiana* è sufficiente, se possibile, eliminare il parametro (tempo) t dalle (1.1).

Supponiamo che ad un certo istante t_1 il punto materiale si trovi in P_1 (di raggio vettore \mathbf{r}_1) e ad un certo istante successivo t_2 ($t_2 > t_1$) in P_2 (di raggio vettore \mathbf{r}_2); diremo allora che il vettore $\vec{P_1P_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \equiv \Delta\mathbf{r}$ è il “vettore spostamento”. Tale vettore evidentemente ha modulo uguale alla *distanza in linea d'aria* tra i due punti P_1 e P_2 . Il *vettore velocità media* in tale intervallo di tempo è allora definito come:

$$\mathbf{v}_m(t_1; t_2) =: \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}, \quad (1.2)$$

dove $\Delta t = t_2 - t_1$. Questo vettore ha la stessa direzione di $\Delta\mathbf{r}$ e lo stesso verso del moto del punto. La *velocità istantanea* si ottiene prendendo il limite di \mathbf{v}_m per $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\mathbf{v}(t) =: \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{v}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}, \quad (1.3)$$

che per definizione è proprio la *derivata del raggio vettore rispetto al tempo*:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{r}}, \quad (1.4)$$

equivalente naturalmente alle tre equazioni scalari:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} \equiv \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \equiv \dot{z}. \quad (1.5)$$

Poiché la velocità istantanea, per sua stessa definizione, è *sempre* tangente alla traiettoria in ogni suo punto, possiamo sempre scrivere che:

$$\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{T}}, \quad (1.6)$$

dove $\hat{\mathbf{T}}$ è il *versore* tangente alla traiettoria nel punto (e all'istante) considerato e v è il *modulo* della velocità stessa.

In modo del tutto analogo, si può definire il vettore *accelerazione media* è:

$$\mathbf{a}_m(t_1; t_2) =: \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}, \quad (1.7)$$

e quella istantanea ne sarà il limite per per $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\mathbf{a}(t) =: \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{a}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}, \quad (1.8)$$

ovvero:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \equiv \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}. \quad (1.9)$$

Per comprendere meglio il vettore accelerazione, deriviamo esplicitamente il vettore velocità istantanea espresso come nell'eq.(1.6); si ha:

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(v \hat{\mathbf{T}}) = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{T}} + v \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{T}} + \frac{v^2}{\rho} \hat{\mathbf{n}}, \quad (1.10)$$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ è il *versore "normale"* diretto verso il *centro di curvatura* (di raggio ρ) della traiettoria, e dove si è tenuto conto che la derivata di un versore è sempre perpendicolare al versore stesso, come si evince da quanto segue:

$$\hat{\mathbf{T}}^2 \equiv \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{T}} = 1 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{T}}^2 = 2 \hat{\mathbf{T}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} \propto \hat{\mathbf{n}}.$$

L'equazione (1.10) mostra che, diversamente dal vettore velocità, l'accelerazione è in generale scomponibile in un'accelerazione *tangenziale*:

$$\mathbf{a}_T = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{T}}, \quad (1.11)$$

responsabile della variazione del modulo della velocità, e un'accelerazione *normale*, comunemente detta "centripeta", diretta verso il *centro di curvatura* della traiettoria:

$$\mathbf{a}_c = \frac{v^2}{\rho} \hat{\mathbf{n}}, \quad (1.12)$$

responsabile della variazione di direzione del moto. Per esempio, in ogni moto rettilineo può essere presente solo la componente tangenziale \mathbf{a}_T , mentre in un moto circolare uniforme è presente solo quella centripeta \mathbf{a}_c .

Talvolta può anche risultare conveniente trattare il moto introducendo una coordinata "curvilinea", s , presa lungo la traiettoria stessa, detta anche *coordinata intrinseca*; più precisamente, scelta un'origine O_s (ed un *verso*) sulla traiettoria stessa, possiamo descrivere il moto del nostro punto materiale con una singola legge oraria:

$$s = s(t).$$

Da questa possiamo definire la *velocità media scalare*:

$$v_m(t_1, t_2) =: \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1},$$

come pure quella *istantanea*:

$$v(t) =: \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m(t_1, t_2) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \equiv \dot{s}.$$

Naturalmente, essendo $|\Delta s| \geq |\Delta \mathbf{r}|$, si ha che:

$$|v_m(t_1, t_2)| \geq |\mathbf{v}_m(t_1, t_2)|,$$

mentre

$$v(t) = |\mathbf{v}(t)|.$$

È possibile *invertire* le equazioni precedenti, ricordandosi che l'integrazione è l'operazione inversa della derivazione. Possiamo allora ottenere la velocità $v(t)$ dall'accelerazione nel seguente modo:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_0^t a(t') dt' \Rightarrow v(t) = v_0 + \int_0^t a(t') dt',$$

dove $v_0 = v(t=0)$ è la velocità *iniziale*. Un'ulteriore integrazione ci fa infine trovare la *legge oraria*:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \Rightarrow \int_{s_0}^{s(t)} ds = \int_0^t v(t') dt' \Rightarrow s(t) = s_0 + \int_0^t v(t') dt',$$

dove ovviamente $s_0 = s(t=0)$ indica la posizione (sulla traiettoria) del punto materiale all'istante $t=0$. Vediamo un esempio esplicito.

1.1.1 Esempio

Un punto materiale vincolato a muoversi su una certa curva γ (i cui punti sono caratterizzati da una certa coordinata s) è soggetto alla seguente accelerazione variabile nel tempo:

$$a(t) = (1 + 2t + 3t^2);$$

se ne vuole determinare la *legge oraria*, sapendo che all'istante iniziale $t=0$ il punto si trova nel punto $P_0 \in \gamma$ di coordinata $s = s_0 = 0$ con velocità $v_0 = 2$. In questo caso una prima integrazione ci dà la seguente velocità in funzione del tempo:

$$v(t) = 2 + \int_0^t \{1 + 2t' + 3(t')^2\} dt' = 2 + t + t^2 + t^3.$$

Integrando di nuovo si ottiene quindi la legge oraria cercata:

$$s(t) = 0 + \int_0^t \{2 + t' + (t')^2 + (t')^3\} dt' = 2t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4}.$$

Quanto detto si estende direttamente anche al formalismo vettoriale, come mostra il seguente esercizio.

1.1.2 Esercizio

Un punto materiale, vincolato a muoversi nel piano (x, y) è soggetto alla seguente accelerazione:

$$\mathbf{a}(t) = (A \sin \omega t) \hat{\mathbf{i}} + B t \hat{\mathbf{j}}.$$

Se ne determini l'equazione della traiettoria (in forma parametrica), sapendo che all'istante iniziale $t = 0$ il punto si trova nell'origine $O(0, 0)$ con velocità $\mathbf{v}_0 = v_0 \hat{\mathbf{i}}$.

Svolgimento:

Per integrazione si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{v}_0}^{\mathbf{v}(t)} d\mathbf{v} &= \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_0 = \int_0^t \left\{ (A \sin \omega t') \hat{\mathbf{i}} + B t' \hat{\mathbf{j}} \right\} dt' = \\ &= \left[-\frac{A}{\omega} \cos \omega t' \hat{\mathbf{i}} + \frac{B (t')^2}{2} \hat{\mathbf{j}} \right]_0^t = \frac{A}{\omega} (1 - \cos \omega t) \hat{\mathbf{i}} + \frac{B t^2}{2} \hat{\mathbf{j}}, \end{aligned}$$

ovvero:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left\{ v_0 + \frac{A}{\omega} (1 - \cos \omega t) \right\} \hat{\mathbf{i}} + \frac{B t^2}{2} \hat{\mathbf{j}}.$$

Integrando nuovamente si ha:

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}(t)} d\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 = \int_0^t \left\{ \left[v_0 + \frac{A}{\omega} (1 - \cos \omega t') \right] \hat{\mathbf{i}} + \frac{B (t')^2}{2} \hat{\mathbf{j}} \right\} dt',$$

da cui, essendo $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$, si arriva direttamente all'equazione parametrica della traiettoria:

$$\mathbf{r}(t) = \left\{ \left(v_0 + \frac{A}{\omega} \right) t - \frac{A}{\omega^2} \sin \omega t \right\} \hat{\mathbf{i}} + \frac{B t^3}{6} \hat{\mathbf{j}}.$$

1.2 Il Moto del Proiettile

Altro esempio particolarmente interessante, specialmente dal punto di vista *didattico*, è lo studio del cosiddetto “moto del proiettile”. Vediamolo in dettaglio, sempre impiegando il metodo vettoriale visto sopra.

Se si trascurano effetti di attrito nell'aria, un proiettile in volo è soggetto alla sola forza peso, per cui l'unica accelerazione alla quale è sottoposto è l'accelerazione (costante) di gravità \mathbf{g} ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$), diretta verso il basso. Il moto sarà allora la composizione di un moto uniforme nella direzione orizzontale (asse x) e di uno uniformemente accelerato verso il basso (asse $-y$). L'accelerazione è quindi:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g} = -g \hat{\mathbf{j}},$$

da cui:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t,$$

o, esplicitando le componenti:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_0 \cos \theta_0 \hat{\mathbf{i}} + (v_0 \sin \theta_0 - gt) \hat{\mathbf{j}},$$

dove θ_0 è l'angolo di *sparo*. Integrando ancora si ottiene allora:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + \int_0^t \left\{ v_0 \cos \theta_0 \hat{\mathbf{i}} + (v_0 \sin \theta_0 - gt') \hat{\mathbf{j}} \right\} dt' = \\ &= (v_0 t \cos \theta_0) \hat{\mathbf{i}} + \left(y_0 + v_0 t \sin \theta_0 - \frac{1}{2} g t^2 \right) \hat{\mathbf{j}}, \end{aligned}$$

avendo supposto che all'istante iniziale (di *sparo*) il proiettile si trovi nel punto $P_0(0, y_0)$. Questo risultato significa che, in forma parametrica, l'equazione della traiettoria è data dalle:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos \theta_0, \\ y(t) = y_0 + v_0 t \sin \theta_0 - \frac{1}{2} g t^2; \end{cases}$$

eliminando il tempo t se ne ottiene la forma cartesiana:

$$y(x) = y_0 + x \tan \theta_0 - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \theta_0} x^2,$$

che è l'equazione di una parabola, il cui vertice rappresenta il punto di massima altezza. Calcoliamoci il *tempo di volo* τ , cioè l'istante (> 0) in cui il proiettile torna al suolo:

$$y(t = \tau) = 0 = y_0 + v_0 \tau \sin \theta_0 - \frac{1}{2} g \tau^2,$$

da cui si ottiene:

$$\tau = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \right)^2 + \frac{2y_0}{g}},$$

avendo scartato, ovviamente, la soluzione negativa ($\tau < 0$). La *gittata* del proiettile è la distanza (in orizzontale) x_G (> 0) tra il punto di lancio e il punto di impatto col terreno:

$$\begin{aligned} x_G &= x(y = 0) = x(t = \tau) = v_0 \tau \cos \theta_0 = \\ &= \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{2g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gy_0}{(v_0 \sin \theta_0)^2}} \right). \end{aligned}$$

L'altezza massima h_{max} corrisponde invece alla y calcolata all'istante (\bar{t}) in cui si annulla la componente verticale della velocità. Tale istante risulta essere:

$$v_y(\bar{t}) = 0 = v_0 \sin \theta_0 - g \bar{t} \quad \Rightarrow \quad \bar{t} = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g},$$

da cui quindi si ottiene:

$$h_{max} = y(t = \bar{t}) = y_0 + v_0 \bar{t} \sin \theta_0 - \frac{1}{2} g \bar{t}^2 = y_0 + \frac{(v_0 \sin \theta_0)^2}{2g}.$$

1.3 Il Moto Circolare Uniforme

Altro particolare moto piano, semplice e didatticamente importante, è il “moto circolare *uniforme*”. In questo caso il punto materiale percorre una traiettoria circolare a velocità (di modulo) costante. Impiegando coordinate *polari* (r, θ) possiamo esprimere il raggio vettore come segue:

$$\mathbf{r}(t) = r \hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{i}}x + \hat{\mathbf{j}}y = r(\hat{\mathbf{i}} \cos \theta + \hat{\mathbf{j}} \sin \theta). \quad (1.13)$$

L'uniformità del moto sulla traiettoria implica che $\dot{\theta} \equiv \omega = \text{costante}$, da cui, per integrazione, possiamo scrivere la *legge oraria* per l'angolo polare:

$$\theta(t) = \omega t + \phi, \quad (1.14)$$

essendo $\phi = \theta(t = 0)$ l'angolo all'istante iniziale $t = 0$.

La velocità si ottiene derivando l'eq.(1.13) rispetto al tempo; tenendo conto che per un moto circolare $\dot{r} = 0$, si ottiene:

$$\mathbf{v}(t) = r \dot{\theta} (-\hat{\mathbf{i}} \sin \theta + \hat{\mathbf{j}} \cos \theta) \equiv r \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \omega \wedge \mathbf{r},$$

dove $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ($= -\hat{\mathbf{i}} \sin \theta + \hat{\mathbf{j}} \cos \theta$) è il versore *tangente* alla circonferenza e si è introdotto il “vettore velocità angolare” definito come:

$$\boldsymbol{\omega} =: \dot{\theta} (\hat{\mathbf{r}} \wedge \hat{\boldsymbol{\theta}}) \equiv \dot{\theta} \hat{\mathbf{k}}.$$

Derivando nuovamente, otteniamo infine l'accelerazione:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = r \ddot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \dot{\theta} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -r \dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{r}} = -\omega^2 \mathbf{r} \equiv \mathbf{a}_c,$$

essendo nulla l'accelerazione angolare $\ddot{\theta}$ nell'ipotesi di moto *uniforme*. Come c'era da aspettarsi, l'unica componente di \mathbf{a} è quella *centripeta* (1.12). Il *periodo* è il tempo impiegato dal punto materiale a compiere un giro completo, ed è quindi dato dalla seguente formula:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (1.15)$$

1.4 Il Moto Armonico

Il Moto Armonico può essere definito come la proiezione di un moto circolare uniforme su uno degli assi cartesiani. Utilizzando quindi le formule del §1.3, vediamo che la corrispondente legge oraria può essere espressa dalla seguente equazione¹:

$$x(t) = \hat{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{r}(t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad (1.16)$$

dove abbiamo sostituito il raggio r con la generica *ampiezza* A del moto; anche ω e ϕ acquistano denominazioni nuove rispetto al moto circolare: la prima è detta *pulsazione* e la seconda *costante di fase*. Calcoliamoci anche in questo caso velocità ed accelerazione; derivando la (1.16) rispetto al tempo t si trova:

$$\begin{aligned} v(t) = \dot{x}(t) &= -A\omega \sin(\omega t + \phi), \\ a(t) = \ddot{x}(t) &= -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t). \end{aligned} \quad (1.17)$$

La seconda di queste formule è anche nota come “equazione armonica”. Si tratta di un’equazione differenziale del secondo ordine *lineare* a coefficienti costanti², la cui soluzione generale può infatti essere scritta nella forma (1.16), con A e ϕ *costanti di integrazione* arbitrarie. Inoltre, la stessa equazione ci permette anche di sapere quale tipo di forza può causare un moto armonico; infatti, dalla seconda legge di Newton, si ottiene:

$$F = m a = -m\omega^2 x \equiv -K x, \quad (1.18)$$

che è, come noto, la formula che esprime, attraverso la “legge di Hooke”, la forza elastica esercitata da una molla (ideale) quando viene compressa o allungata di un tratto x .

¹Talvolta, si preferisce denominare i moti descritti da questa legge “oscillazioni armoniche”.

²Per una breve esposizione sulle equazioni differenziali vedasi, per esempio, S. Ranfone, *Complementi di Analisi Matematica*, (capitolo 3).

Capitolo 2

Meccanica (parte II): Statica e Dinamica

2.1 Le Leggi della Dinamica di Newton

Durante un lungo periodo di gestazione di quasi tre secoli, dal periodo dei “Calculatores” di Oxford¹ e dei *Maestri* di Parigi², la *Filosofia Naturale* - e la *Meccanica* in particolare - si allontanò gradualmente dalle idee e dai principi della “Fisica Aristotelica”, principi che avevano dominato per oltre quindici secoli la cultura scientifica. Come è ben noto, questi nuovi sviluppi sfociarono tra la seconda metà del ‘500 e la prima metà del ‘600 nella cosiddetta “Rivoluzione Scientifica”. Le tappe possono essere contrassegnate da alcuni dei testi più significativi sull’argomento: Niccolò Tartaglia (*La Nova Scientia*; 1537), Francesco Buonamici³ (*De Motu*; 1591), Giovan Battista Benedetti (*Demonstratio Proportionum Motuum Localium contra Aristotelem et omnes Philosophos*; 1554), Galileo Galilei (*Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, intorno a due nuove scienze attenenti alla Mecanica & i Movimenti Locali*; 1638). Ma la vera nascita della “Meccanica Classica” fu sicuramente la pubblicazione a Londra nel 1687 di quello che probabilmente può essere considerato il libro *Manifesto* della Rivoluzione Scientifica, almeno per quanto concerne le scienze fisiche⁴, il *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* di Isaac Newton. In questo libro vengono gettate le basi della Fisica-Meccanica come ancora oggi vengono insegnate e studiate nelle scuole e nelle Università di tutto il mondo, nelle quali

¹Un gruppo di filosofi naturali e matematici attivi nel XIV secolo al Merton College - tra i quali spiccano Bradwardine, Swineshead e Heytesbury - che svilupparono importanti idee, specialmente nel contesto della cinematica. Per una estesa esposizione degli sviluppi storici della Meccanica nel medioevo si veda: M. Clagett, *La Meccanica nel Medioevo*, Feltrinelli.

²In particolare, G. Buridano, N. Oresme e Alberto di Sassonia, anch’essi vissuti nel XIV secolo.

³(n. 1533 - m. 1603) fu Professore di Galileo a Pisa.

⁴Lo stesso ruolo avuto dal Vesalio (*De Humani Corporis Fabrica*; 1543) per l’anatomia e la medicina, o il Copernico (*De Revolutionibus Orbium Coelestium*; 1543) per l’Astronomia.

la *matematizzazione* della descrizione dei fenomeni naturali ha un ruolo determinante. Oltre a ciò, nel libro viene anche percorso il primo tratto di strada verso l'*Unificazione* di tutte le leggi che descrivono l'Universo, obiettivo che i fisici continuano ad inseguire ancora oggi. Infatti, Newton riuscì ad unificare le leggi che descrivono la caduta dei gravi qui sulla Terra con quelle che spiegano il moto dei corpi celesti, attraverso la sua "Teoria della Gravitazione Universale". In questo breve *excursus* storico val forse la pena di fornire gli enunciati dei famosi "Tre Principi della Dinamica" nella loro forma originale⁵:

- **Lex. I:** *Corpus omne perseverare in statu suo quiescenti vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.*
- **Lex. II:** *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*
- **Lex. III:** *Actioni contrariam semper & aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales & in partes contrarias dirigi.*

La forma con cui vengono esposte oggi è quasi la traduzione letterale di quanto scritto in latino da Newton:

- **Primo Principio:** Un corpo permane in stato di quiete o continua a muoversi di moto rettilineo uniforme fintantoché non intervengono forze esterne che ne modificano lo stato di moto.
- **Secondo Principio:** La risultante \mathbf{F} delle Forze esterne agenti su un corpo è uguale al prodotto della sua massa m per l'accelerazione \mathbf{a} che caratterizza il suo moto:

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} . \tag{2.1}$$

- **Terzo Principio:** Ad ogni forza (*Azione*) esercitata da un corpo A su un corpo B , corrisponde una forza (*Reazione*) di quest'ultimo sul primo di eguale intensità e direzione, ma verso opposto:

$$\mathbf{F}(A \rightarrow B) = -\mathbf{F}(B \rightarrow A) . \tag{2.2}$$

Fondamentalmente, potremmo dire che la risoluzione dei problemi di dinamica consiste nel risolvere un insieme di equazioni del tipo (2.1), dette "equazioni del moto", che matematicamente sono equazioni differenziali del secondo ordine nelle coordinate che descrivono la configurazione spaziale del sistema. Le soluzioni forniscono le *leggi orarie*, attraverso le quali è possibile conoscere le posizioni di tutti i corpi ad ogni istante. Purtroppo, però, solo pochi sistemi risultano essere *integrabili*, per cui spesso ci dobbiamo accontentare, per esempio, di riuscire a

⁵Isaac Newton (*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*; 1687), pagg. 12-13.

prevedere le velocità in funzione della posizione, senza poter dire alcunché sulle loro dipendenze temporali.

Tipicamente, nei problemi di dinamica che vengono trattati nei corsi di *Fisica Generale*, sono presenti le seguenti forze:

- la forza peso: $m \mathbf{g}$; dove m è la massa del corpo e \mathbf{g} è l'accelerazione di gravità incontrata precedentemente;
- la forza elastica: $F_e = -K \Delta l$, (*Legge di Hooke*), dove K è detta *costante elastica* della molla e $\Delta l = l - l_0$ l'allungamento (o compressione) della molla stessa;
- la reazione vincolare: \mathbf{R} . Nel caso di un semplice *appoggio* viene anche detta “Forza Normale” e indicata con \mathbf{N} , essendo perpendicolare al piano tangente. In generale, il numero di *reazioni vincolari* (ovvero di *componenti*) indipendenti corrispondenti ad un certo vincolo è uguale al numero di “gradi di libertà” che questo *impedisce*; per esempio, ad una *cerniera* (che nel piano mantiene *fisso* un punto O), essendo un vincolo “doppio”, corrispondono due componenti (*e.g.*, R_{Ox} e R_{Oy});
- la forza di attrito *statico*: $F_s \leq \mu_s N$, dove μ_s è un numero adimensionale, detto *coefficiente di attrito statico*, ed N è l'intensità della “reazione vincolare”;
- la forza di attrito *dinamico*: $F_d = \mu_d N$; in questo caso μ_d è detto *coefficiente di attrito dinamico*;
- la tensione T delle corde che possono *unire* o comunque collegare le varie parti di un sistema.

2.2 Sistemi Non-Inerziali e Forze d'Inerzia

Prima di proseguire nella nostra esposizione dei principi fondamentali della Meccanica è necessaria un'importante precisazione: la legge di Newton (2.1), con \mathbf{F} la risultante delle forze esterne agenti sul sistema, è “corretta” solo se riferita rispetto ad un *Sistema di Riferimento* “Inerziale”, cioè non accelerato. Un tempo si associava l'inerzialità di un sistema di riferimento alla mancanza di accelerazione rispetto al “Sistema delle Stelle Fisse”. Ma oggi sappiamo benissimo che, in realtà, non esiste alcun sistema *reale* che non sia in qualche modo accelerato: le stelle della nostra Galassia, incluso il Sole, ruotano attorno al centro galattico, ma anche quest'ultimo sta accelerando insieme all'intero Gruppo Locale di galassie verso l'ammasso che vediamo nella costellazione della Vergine⁶, e così via... Senz'altro non possiamo individuare un vero *centro* dell'Universo, che si possa ritenere veramente inerziale. Detto ciò, dobbiamo correggere la nostra

⁶detto “Superammasso Locale”.

frase precedente e dire che *la legge di Newton (2.1) è valida solo se riferita rispetto ad un sistema di riferimento che per il problema che stiamo studiando possa ritenersi “ragionevolmente” inerziale*, nel senso che sono trascurabili gli effetti dell’accelerazione del sistema di riferimento stesso; la stanza in cui sto scrivendo, per esempio, può ritenersi inerziale per lo studio della caduta della penna dalla mia scrivania, ma non potrebbe ritenersi tale se pensassi di lanciare un missile dalla finestra, poiché in tal caso potrebbero essere importanti gli effetti della rotazione terrestre! Vediamo un altro esempio. È esperienza comune il *sentirsi spinti* indietro se siamo in piedi su un treno in partenza... o *spinti* in avanti quando il treno frena all’avvicinarsi della stazione di arrivo. Eppure potremmo dire che “nessuno” (nessun altro corpo) ci ha *veramente* spinto. Ed è vero. Le forze *reali* sono sempre l’effetto dell’interazione di altri corpi, non per niente sappiamo che esse sono sempre riconducibili in qualche modo alle sole quattro “Forze Fondamentali”: quella gravitazionale, quella elettromagnetica, e le due forze nucleari (a corto raggio), forte e debole. Ma allora che cos’è che ci ha spinto? In effetti, non è una *vera* forza, nel senso che non è dovuta ad alcuna interazione (tra corpi); è piuttosto un “termine correttivo” necessario per poter utilizzare la legge di Newton (2.1) anche quando scegliamo un sistema di riferimento *non-inerziale*, rispetto al quale altrimenti essa non sarebbe corretta. Alla luce di tutto ciò si rende quindi necessario vedere come introdurre in generale questa *correzione*.

Consideriamo per esempio un sistema di riferimento che possa ritenersi ragionevolmente inerziale per il problema che vogliamo studiare; tale sistema, definito da una terna cartesiana $O(x, y, z)$ può essere definito “assoluto”; sia quindi $O'(x', y', z')$ un altro sistema di riferimento, in moto arbitrario rispetto al precedente; tale sistema sarà allora detto “relativo”. Si voglia confrontare il moto di un certo *punto materiale* P , osservato nei due sistemi di riferimento. Una evidente identità vettoriale ci permette di scrivere che:

$$\vec{OP} = O\vec{O}' + O'\vec{P};$$

che, se derivata rispetto al tempo ci porta a:

$$\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_O = (\mathbf{v}_{O'} - \mathbf{v}_O) + \mathbf{v}_{P'},$$

dove $\mathbf{v}_{P'} = \frac{d}{dt}O'\vec{P}$ è la velocità di P “*relativa*” al sistema O' . Semplificando, si arriva perciò alla seguente relazione:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{v}_{P'},$$

essendo $\mathbf{v}_{O'}$ la velocità di “*trascinamento*” del sistema in moto. Un’ulteriore derivazione ci dà infine la corrispondente relazione tra le accelerazioni:

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{O'} + \mathbf{a}_{P'}. \quad (2.3)$$

Poiché il sistema *assoluto* O è inerziale, rispetto ad esso la dinamica del sistema (il punto materiale P) è descritta dalla legge di Newton (2.1), per cui deve valere:

$$m \mathbf{a}_P = \mathbf{F},$$

con \mathbf{F} la risultante delle forze *vere* esterne agenti su P . Sostituendo il risultato (2.3), si ottiene quindi:

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}_{O'} + m \mathbf{a}_{P'},$$

per cui possiamo dire che la *corretta* legge della dinamica nel sistema non-inerziale O' assume la seguente forma:

$$m \mathbf{a}_{P'} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{in}, \quad (2.4)$$

dove si è interpretato il termine “correttivo” come l’azione di extra forze aggiuntive, dette “forze d’inerzia”, la cui generica espressione è:

$$\mathbf{F}_{in} = -m \mathbf{a}_{O'}. \quad (2.5)$$

L’inclusione di queste forze, talvolta anche dette “fittizie” o “apparenti”, è il prezzo da pagare per poter descrivere il sistema dinamico rispetto ad un sistema di riferimento che non è inerziale. L’eq.(2.5) mostra come in generale esse siano sempre opposte all’accelerazione di trascinamento di tale sistema; è questo il motivo per cui, quando il treno accelera noi ci sentiamo spinti indietro, mentre ci sentiamo spinti in avanti quando il treno decelera. Ed ancora, per lo stesso motivo, se il sistema di riferimento è soggetto ad una rotazione, e quindi ad una accelerazione di tipo centripeto (1.12), il sistema dinamico, oltre alle altre forze eventualmente presenti, è soggetto anche alla forza d’inerzia associata a tale accelerazione; questa forza, detta “centrifuga”, avendo verso opposto rispetto all’accelerazione centripeta, è diretta radialmente verso l’esterno, ed ha intensità

$$F_{cf} = \frac{m v^2}{\rho}, \quad (2.6)$$

essendo ρ il raggio di curvatura e v la velocità del *punto materiale* in quel dato istante.

Se l’eq.(2.4) è quindi la *Legge della Dinamica* in un generico sistema di riferimento, anche non-inerziale, non ci resta che esplicitare la forma più generale del termine aggiuntivo costituito dalle forze d’inerzia, ovvero, in virtù della (2.5), dell’accelerazione di trascinamento $\mathbf{a}_{O'}$. Il modo più semplice per ottenere tale risultato è il seguente. Consideriamo il generico moto (piano) di O' , espresso in coordinate polari come abbiamo fatto al §1.3; eliminando per semplicità di scrittura l’*apice*, e ricordando che adesso la variabile radiale r non è più necessariamente costante, possiamo ottenere la *generica* velocità (nel piano) di O' derivando rispetto al tempo l’eq.(1.13):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\hat{\mathbf{r}}} = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\theta} \hat{\theta} = \\ &= \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + \omega \wedge \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

dove si sono utilizzati alcuni risultati già ottenuti nel §1.3; il primo termine a sinistra è la *velocità radiale*, mentre il secondo è quella *tangenziale*. Derivando ancora si ottiene l'accelerazione cercata:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} &\equiv \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r} \hat{\mathbf{r}} + \dot{r} \dot{\hat{\mathbf{r}}} + \dot{r} \dot{\hat{\theta}} + r \ddot{\theta} \hat{\theta} + r \dot{\theta} \dot{\hat{\theta}} = \\ &= \ddot{r} \hat{\mathbf{r}} + 2 \dot{r} \dot{\hat{\theta}} + r \ddot{\theta} \hat{\theta} - r \dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{r}} = \\ &= \ddot{r} \hat{\mathbf{r}} + 2 \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Il primo termine è l'accelerazione radiale-*traslazionale*, il secondo è detto “accelerazione di Coriolis” (con $\mathbf{v}_r = \dot{r} \hat{\mathbf{r}}$), il terzo termine è presente solo nel caso in cui il sistema *relativo* sia caratterizzato da una rotazione non-uniforme rispetto a quello assoluto (inerziale), e l'ultimo è l'accelerazione centripeta (1.12) vista in precedenza.

Dall'eq.(2.5) otteniamo pertanto la seguente generica espressione per le forze d'inerzia:

$$\mathbf{F}_{in} = -m \ddot{r} \hat{\mathbf{r}} + m \omega^2 \mathbf{r} + 2m \mathbf{v}_r \wedge \boldsymbol{\omega} + m \mathbf{r} \wedge \dot{\boldsymbol{\omega}}. \quad (2.9)$$

Il secondo termine è la *Forza centrifuga* già data nella (2.6), mentre il terzo è la *Forza di Coriolis*:

$$\mathbf{F}_{cor} = 2m \mathbf{v}_r \wedge \boldsymbol{\omega}, \quad (2.10)$$

dove, nel caso generale, \mathbf{v}_r è la velocità “relativa” del punto materiale (e non solo la sua componente radiale) rispetto al sistema di riferimento in rotazione. Ciò significa che la forza di Coriolis è costantemente perpendicolare sia all'asse di rotazione di tale sistema (e quindi alla sua velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$) che alla stessa velocità *relativa*.

Nel prossimo esempio vedremo un'interessante applicazione di quanto visto in questo paragrafo.

2.2.1 Esempio: La Caduta dei Gravi (*Prima Parte*)

In questo esempio vogliamo studiare la caduta di un grave dall'alto di una torre alta h situata in un luogo di latitudine θ , alla luce dei risultati ottenuti nel paragrafo precedente §2.2.

Trascurando l'attrito dell'aria, l'unica forza *vera* agente sul grave in caduta libera è la forza di gravità. Il sistema di riferimento “fisso” nello spazio (detto *siderale*), considerato *inerziale*⁷ è quello con origine nel centro della Terra, l'asse z (di versore $\hat{\mathbf{k}}$) coincidente con l'asse terrestre e diretto verso il polo Nord, e gli altri due assi diretti verso due stelle *fisse*. Il sistema “relativo”, invece, è il sistema solidale con la superficie terrestre con origine O' ai piedi della torre, esattamente sulla verticale del punto di caduta, ed assi x_* , y_* , z_* , cui corrispondono i versori $\hat{\mathbf{i}}_*$, $\hat{\mathbf{j}}_*$, $\hat{\mathbf{k}}_*$, rispettivamente. L'asse z_* sia diretto verso lo *zenith* (locale), cioè verticalmente verso l'alto rispetto al punto di caduta del grave, mentre l'asse x_* è diretto verso la direzione del *Sud* locale, nel piano

⁷Si trascurano gli effetti dovuti al moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole.

dell'orizzonte; l'asse y_* è allora diretto necessariamente nella direzione dell'*Est* locale, sempre nello stesso piano. A causa della rotazione terrestre attorno al proprio asse, il sistema relativo è “non-inerziale”, caratterizzato da una velocità angolare $\omega = \omega \hat{\mathbf{k}}$ diretta verso l'asse z del sistema *fisso* e di modulo $\omega = \frac{2\pi}{T_d}$ (con $T_d = 24$ ore).

In conseguenza della non-inerzialità del sistema relativo (mobile), l'equazione del moto del grave riferita ad esso deve essere scritta nella forma (2.4), con l'inclusione cioè delle forze d'inerzia (2.9). In particolare, nella presente situazione sono presenti solo la forza centrifuga e quella di Coriolis. La prima, diretta radialmente verso l'esterno rispetto all'asse (z) di rotazione terrestre, può essere espressa nel sistema relativo come:

$$\mathbf{F}_{cf} = m\omega^2 (R + z_*) \cos \theta (\hat{\mathbf{k}}_* \cos \theta + \hat{\mathbf{i}}_* \sin \theta), \quad (2.11)$$

dove si è tenuto conto che la distanza (variabile) dall'asse di rotazione è $(R + z_*) \cos \theta$. Questa formula ci suggerisce già che l'effetto di questa forza d'inerzia sarà una deviazione verso il Sud (locale) rispetto alla verticale. D'altra parte, la forza di Coriolis, data nell'eq.(2.10), nel sistema relativo può essere scomposta come segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{cor} &= 2m \mathbf{v}_r \wedge \omega = 2m (\dot{x}_* \hat{\mathbf{i}}_* + \dot{y}_* \hat{\mathbf{j}}_* + \dot{z}_* \hat{\mathbf{k}}_*) \wedge \hat{\mathbf{k}}_* \omega = \\ &= 2m\omega (\dot{x}_* \hat{\mathbf{i}}_* + \dot{y}_* \hat{\mathbf{j}}_* + \dot{z}_* \hat{\mathbf{k}}_*) \wedge (-\hat{\mathbf{i}}_* \cos \theta + \hat{\mathbf{k}}_* \sin \theta) = \\ &= 2m\omega \{ \dot{y}_* \sin \theta \hat{\mathbf{i}}_* - (\dot{z}_* \cos \theta + \dot{x}_* \sin \theta) \hat{\mathbf{j}}_* + \dot{y}_* \cos \theta \hat{\mathbf{k}}_* \} \simeq \\ &\simeq -2m\omega \dot{z}_* \cos \theta \hat{\mathbf{j}}_*. \end{aligned} \quad (2.12)$$

dove si è tenuto conto che in prima approssimazione la velocità (relativa) del grave è diretta verticalmente, lungo l'asse z_* . In particolare, poiché durante la caduta del grave verso il *basso* si ha $\dot{z}_* < 0$, vediamo che la forza di Coriolis, variabile durante il moto, è diretta verso $+y_*$, e causerà quindi una deviazione dalla verticale verso l'*Est* locale. In definitiva, pertanto, l'effetto complessivo delle due forze d'inerzia è uno spostamento del grave in caduta verso *Sud-Est* rispetto alla verticale.

Per ottenere risposte quantitative dobbiamo integrare l'equazione del moto, che nel sistema relativo è, per quanto detto, la seguente⁸:

$$\begin{aligned} m \mathbf{a}' &= \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_{cf} + \mathbf{F}_{cor} = \\ &= -\frac{GMm}{(R + z_*)^2} \hat{\mathbf{k}}_* + m\omega^2 (R + z_*) \cos \theta (\hat{\mathbf{k}}_* \cos \theta + \hat{\mathbf{i}}_* \sin \theta) - 2m\omega \dot{z}_* \cos \theta \hat{\mathbf{j}}_*, \end{aligned} \quad (2.13)$$

⁸Utilizziamo l'espressione della forza di Gravitazione Universale di Newton per esprimere la forza peso del grave, per tener conto della variazione dell'accelerazione di gravità al variare della quota; ciò perché i suoi effetti, come mostreremo nel §2.2.2, risultano essere più importanti di quelli dovuti alla stessa rotazione terrestre (cioè, alla forza centrifuga).

dove $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ è la *Costante di Gravitazione Universale* ed M è la massa della Terra ($M = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$). Questa equazione vettoriale è equivalente alle seguenti tre equazioni *scalari*:

$$\begin{cases} \ddot{x}_* = \omega^2 (R + z_*) \sin \theta \cos \theta, \\ \ddot{y}_* = -2\omega \cos \theta \dot{z}_*, \\ \ddot{z}_* = -\frac{GM}{(R + z_*)^2} + \omega^2 (R + z_*) \cos^2 \theta. \end{cases} \quad (2.14)$$

Poiché $z_* \leq h \ll R$ e $\omega^2 R \ll g$ (essendo $g = GM/R^2 = 9.81 \text{ m/s}^2$ l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre), in prima approssimazione possiamo scrivere queste equazioni in una forma un po' più semplice:

$$\begin{cases} \ddot{x}_* = \frac{1}{2} \omega^2 R \sin 2\theta, \\ \ddot{y}_* = -2\omega \cos \theta \dot{z}_*, \\ \ddot{z}_* = -g. \end{cases} \quad (2.15)$$

Nell'*Approfondimento* che segue faremo alcune considerazioni sulle approssimazioni qui introdotte, valutando l'entità delle correzioni che potremmo apportare ai risultati che ora otterremo.

L'integrazione della terza delle eq.(2.15), con le *condizioni iniziali* $z_*(t=0) = h$, $\dot{z}_*(t=0) = 0$, porta ai seguenti risultati:

$$\begin{cases} \dot{z}_*(t) = -gt, \\ z_*(t) = h - \frac{1}{2}gt^2, \end{cases} \quad (2.16)$$

che sono infatti le ordinarie leggi della caduta dei gravi. Utilizzando quindi l'espressione ottenuta per \dot{z}_* nella seconda delle eq.(2.15), si ha:

$$\ddot{y}_* = 2\omega g t \cos \theta, \quad (2.17)$$

la cui diretta integrazione (con le condizioni iniziali $y_*(t=0) = \dot{y}_*(t=0) = 0$) dà:

$$\begin{cases} \dot{y}_*(t) = \omega g t^2 \cos \theta, \\ y_*(t) = \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \theta. \end{cases} \quad (2.18)$$

Infine, dalla prima delle (2.15) si ottiene (con le stesse condizioni iniziali: $x_*(t=0) = \dot{x}_*(t=0) = 0$):

$$\begin{cases} \dot{x}_*(t) = \frac{1}{2} \omega^2 R t \sin 2\theta, \\ x_*(t) = \frac{1}{4} \omega^2 R t^2 \sin 2\theta. \end{cases} \quad (2.19)$$

Le formule (2.19), (2.18), (2.16) rappresentano l'equazione della traiettoria del grave in caduta libera in forma parametrica. Per calcolare il *tempo di caduta* \tilde{t} e le coordinate $(\tilde{x}_*, \tilde{y}_*, \tilde{z}_*)$ del *punto d'impatto* \tilde{P} è sufficiente porre in queste

equazioni $z_*(t = \tilde{t}) = \tilde{z}_* = 0$. Si ottengono così quantitativamente le deviazioni dalla verticale dovute alle due forze d'inerzia:

$$\begin{cases} \tilde{x}_* = \frac{\omega^2 R h \sin 2\theta}{2g}, \\ \tilde{y}_* = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2h^3}{g}} \omega \cos \theta; \end{cases} \quad (2.20)$$

la prima verso il *Sud* (locale) e la seconda verso *Est*. Il loro rapporto è quindi:

$$\frac{\tilde{y}_*}{\tilde{x}_*} = \frac{2\sqrt{2gh}}{3\omega R \sin \theta} = \frac{T_d \sqrt{2gh}}{3\pi R \sin \theta}. \quad (2.21)$$

Inserendo i dati, $R = 6367 \text{ km}$ per il raggio della Terra, e $T_d = 24 \text{ h} = 24 \cdot 3600 \text{ s}$ per il suo periodo di rotazione, troviamo che la deviazione verso *Sud* è predominante rispetto a quella verso *Est*, a meno di trovarsi estremamente vicino all'equatore. Per esempio, per cadute di gravi da altezze $h \sim 50 \text{ m}$, le due deviazioni risultano essere dello stesso ordine solo per latitudini $|\theta| \leq 3^\circ$. Alle nostre latitudini ($\theta \sim 45^\circ$) si trova addirittura che tale predominanza degli effetti centrifughi su quelli dovuti alla forza di Coriolis si ha almeno fino ad altezze di caduta dell'ordine dei 10000 m, tipiche quote di volo degli aerei di linea:

$$\frac{\tilde{y}_*}{\tilde{x}_*} \simeq \sqrt{\frac{h(\text{m})}{12000}}. \quad (2.22)$$

La prima delle eq.(2.20) rivela anche che il rapporto tra la deviazione verso *Sud* e l'altezza dalla quale cade il grave è costante:

$$\frac{\tilde{x}_*}{h} = \frac{2\pi^2 R \sin 2\theta}{g T_d^2}; \quad (2.23)$$

per esempio, di nuovo alla latitudine di 45° , troviamo:

$$\frac{\tilde{x}_*}{h} = \frac{2\pi^2 R}{g T_d^2} \simeq 1.7 \cdot 10^{-3}, \quad (2.24)$$

ovvero una deviazione di meno dello 0.2% rispetto all'altezza!

2.2.2 Esempio: La Caduta dei Gravi (*Approfondimento*)

Con motivazioni essenzialmente didattiche, vogliamo qui studiare più da vicino il sistema di equazioni (2.14), ed in particolare quella che descrive il moto del grave nella direzione verticale (z_*):

$$\ddot{z}_* = -\frac{GM}{(R + z_*)^2} + \omega^2 (R + z_*) \cos^2 \theta, \quad (2.25)$$

mostrando come in prima approssimazione si giunga alla semplice soluzione (2.16), che è l'ordinaria legge del moto uniformemente accelerato. Come già anticipato, risulta che nella *correzione* a tale risultato gli effetti dovuti alla variazione dell'accelerazione di gravità con la quota z_* sono più importanti di quelli dovuti alla forza centrifuga. Vediamo perché. Poiché per ogni ragionevole altezza di caduta h si ha che $z_* \leq h \ll R$, possiamo sviluppare in serie e *linearizzare* l'espressione del primo termine⁹ a destra nell'eq.(2.25), ottenendo¹⁰:

$$\begin{aligned} G_{z_*} &= -\frac{GM}{(R+z_*)^2} = -\frac{GM}{R^2\left(1+\frac{z_*}{R}\right)^2} = -g\left(1+\frac{z_*}{R}\right)^{-2} \simeq \\ &\simeq -g\left(1-\frac{2z_*}{R}\right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

In questo modo l'eq.(2.25) diventa una semplice equazione differenziale *lineare* del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$\ddot{z}_* - \left\{ \frac{2g}{R} + (\omega \cos \theta)^2 \right\} z_* = -\{g - (\omega \cos \theta)^2 R\}. \quad (2.27)$$

Poiché $g/\omega^2 R \simeq 291.3 \gg 1$, ad ogni latitudine θ i due secondi termini all'interno delle parentesi *graffe* possono essere trascurati, confermando il fatto che almeno per il moto lungo z_* gli effetti delle forze d'inerzia non danno correzioni rilevanti. A questo punto, l'eq.(2.26) assume la forma:

$$\ddot{z}_* - \frac{2g}{R} z_* = -g. \quad (2.28)$$

Seguendo la procedura standard per la risoluzione di questo tipo di equazioni differenziali¹¹ scriviamoci l'equazione *omogenea* ad essa associata:

$$\ddot{z}_{*o} - \frac{2g}{R} z_{*o} = 0, \quad (2.29)$$

per la quale l'equazione (algebraica) *caratteristica*:

$$\lambda^2 - \frac{2g}{R} = 0 \quad (2.30)$$

ammette due soluzioni reali distinte: $\lambda_{1(2)} = \pm\sqrt{2g/R} \equiv \pm\Gamma$. La sua soluzione *generale* è allora:

$$z_{*o}(t) = A e^{\Gamma t} + B e^{-\Gamma t}, \quad (2.31)$$

dove A e B sono *costanti di integrazione*. Poiché il termine noto nella (2.28) è costante ($-g$), una *soluzione particolare* z_{*P} della (2.28) può pure essere una

⁹Si tratta della componente z_* del cosiddetto "Campo Gravitazionale" ($\mathbf{G} = \mathbf{F}_G/m$): $G_{z_*} = \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{k}}_*$.

¹⁰Si ricorda che, al *primo ordine*, $(1 \pm x)^\alpha \simeq 1 \pm \alpha x + \mathcal{O}(x)$. Vedasi, per esempio, in S. Ranfone, *Complementi di Analisi Matematica*, cap. 1.

¹¹Vedasi di nuovo, quanto esposto nel cap. 3 dei già citati *Complementi di Analisi Matematica*.

funzione costante, per cui troviamo (con $\ddot{z}_{*P} = 0$): $z_{*P} = R/2$. La *soluzione generale* dell'equazione completa (2.28), essendo la somma della soluzione generale dell'omogenea associata e di una soluzione particolare, può allora essere scritta come:

$$z_*(t) = z_{*o}(t) + z_{*P} = A e^{\Gamma t} + B e^{-\Gamma t} + \frac{R}{2}. \quad (2.32)$$

Per ottenere la soluzione definitiva dobbiamo trovare le costanti di integrazione A e B imponendo le *condizioni iniziali*: $z_*(0) = h$, $\dot{z}_*(0) = 0$. Si ha quindi:

$$z_*(0) = h = A + B + \frac{R}{2}. \quad (2.33)$$

Inoltre, derivando (rispetto al tempo t) la soluzione (2.32) e ponendo $t = 0$ troviamo:

$$\dot{z}_*(t) = \Gamma (A e^{\Gamma t} - B e^{-\Gamma t}) \Rightarrow \dot{z}_*(0) = \Gamma (A - B) = 0 \Rightarrow A = B. \quad (2.34)$$

Pertanto, dalla (2.33) otteniamo:

$$A = B = \frac{1}{2} \left(h - \frac{R}{2} \right), \quad (2.35)$$

cosicché la soluzione che descrive il moto del grave nella direzione verticale locale può in definitiva scriversi:

$$z_*(t) = \left(h - \frac{R}{2} \right) \cosh(\Gamma t) + \frac{R}{2}, \quad (2.36)$$

(dove $\Gamma = \sqrt{2g/R}$).

Cerchiamo di valutare il tempo di caduta \tilde{t} . Essendo sempre $h \ll R$ si ha al primo ordine (vedi *nota 10*):

$$z_*(\tilde{t}) = 0 \Rightarrow \cosh(\Gamma \tilde{t}) = \left(1 - \frac{2h}{R} \right)^{-1} \simeq 1 + \frac{2h}{R},$$

cosicché possiamo concludere che sia sempre $\Gamma \tilde{t} \ll 1$. In questo modo possiamo sviluppare in serie anche il coseno iperbolico, ottenendo:

$$\begin{aligned} \cosh(\Gamma \tilde{t}) &= \frac{1}{2} (e^{\Gamma \tilde{t}} + e^{-\Gamma \tilde{t}}) \simeq \frac{1}{2} \left\{ 1 + \Gamma \tilde{t} + \frac{(\Gamma \tilde{t})^2}{2} + \dots + 1 - \Gamma \tilde{t} + \frac{(\Gamma \tilde{t})^2}{2} + \dots \right\} \\ &\simeq 1 + \frac{\Gamma^2 \tilde{t}^2}{2} + \dots \simeq 1 + \frac{2h}{R}, \end{aligned}$$

da cui ritroviamo il risultato classico per il tempo di caduta di un grave:

$$\tilde{t} = \sqrt{\frac{2}{\Gamma^2} \frac{2h}{R}} = \sqrt{2 \frac{R}{2g} \frac{2h}{R}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (2.37)$$

Allo stesso modo, possiamo mostrare che anche la stessa legge oraria lungo z_* si riduce alla formula caratteristica del moto uniformemente accelerato (2.16):

$$\begin{aligned} z_*(t) &= \frac{R}{2} + \frac{1}{2} \left(h - \frac{R}{2} \right) (e^{\Gamma t} + e^{-\Gamma t}) = \\ &= \frac{R}{2} + \frac{1}{2} \left(h - \frac{R}{2} \right) \left\{ 1 + \Gamma t + \frac{(\Gamma t)^2}{2} + \dots + 1 - \Gamma t + \frac{(\Gamma t)^2}{2} + \dots \right\} \simeq \\ &\simeq \frac{R}{2} + \left(h - \frac{R}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \Gamma^2 t^2 \right) = \frac{R}{2} + h - \frac{R}{2} + \left(h - \frac{R}{2} \right) \frac{1}{2} \frac{2g}{R} t^2 = \\ &\simeq h - \frac{1}{2} g t^2. \end{aligned} \quad (2.38)$$

2.3 Statica

La Statica è la parte della meccanica che studia l'equilibrio dei corpi. Un *Sistema Meccanico* è detto in equilibrio in un certo sistema di riferimento se, rispetto ad esso, la sua accelerazione è nulla, ovvero se è in quiete o se si muove di moto rettilineo e uniforme. Dallo stesso “Principio d’Inerzia”, o ancor meglio dalla seconda legge della dinamica, vediamo che condizione necessaria per avere uno stato di equilibrio è che la somma di tutte le forze esterne agenti sul sistema sia nulla:

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_{(ext)i} = 0. \quad (2.39)$$

Questa è detta “Prima equazione *Cardinale* della Statica”. In realtà, questa condizione garantisce solo l'equilibrio rispetto alle “traslazioni”, per cui non è di per sé sufficiente. Per avere equilibrio dobbiamo aggiungere una condizione ulteriore, relativa alla possibilità di rotazioni del sistema. Se le forze sono le cause delle accelerazioni traslazionali, i “Momenti delle Forze” lo sono per quelle rotazionali. Vediamone la definizione: il Momento rispetto ad un punto O (detto *polo*) di una Forza \mathbf{F} applicata in un punto P è il vettore (assiale):

$$\mathbf{M}_O =: \vec{OP} \wedge \mathbf{F}. \quad (2.40)$$

Il suo modulo è dato dal prodotto dell'intensità della forza F per il cosiddetto “braccio” b , che è la distanza tra la *retta direttrice*¹² della forza \mathbf{F} ed il polo

¹²La retta direttrice di una forza è semplicemente la retta su cui giace il vettore \mathbf{F} che la rappresenta.

O . Per questo motivo, spesso, nelle applicazioni e negli esercizi si utilizza la seguente formula *scalare*:

$$M_O =: \pm F b, \quad (2.41)$$

dove, per convenzione, si sceglie il segno “+” se la rotazione indotta dalla forza (ovvero, dal suo *Momento*) è *antioraria*, il segno “-” se è *oraria*.

Proprietà spesso utile nello svolgimento dei problemi di statica è l’indipendenza del “Momento totale” dalla scelta del polo O . Infatti, scegliendo un nuovo *polo* O' , abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{O'} &= \sum_i \vec{O'P}_i \wedge \mathbf{F}_i = \sum_i (\vec{O'O} + \vec{OP}_i) \wedge \mathbf{F}_i = \\ &= \vec{O'O} \wedge \sum_i \mathbf{F}_i + \sum_i \vec{OP}_i \wedge \mathbf{F}_i \equiv \mathbf{M}_O, \end{aligned} \quad (2.42)$$

dove si è tenuto conto che il primo termine si annulla in virtù della (2.39).

A questo punto possiamo concludere che la condizione necessaria per avere anche equilibrio rotazionale è che sia nulla la somma di tutti i momenti delle forze (esterne):

$$\mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{M}_{iO} = \sum_i \vec{OP}_i \wedge \mathbf{F}_{(ext)i} = 0. \quad (2.43)$$

Questa è la “Seconda Equazione *Cardinale* della Statica”, ed insieme alla (2.39) costituisce il *sistema* di equazioni attraverso il quale è possibile determinare le configurazioni di equilibrio di un sistema meccanico, come mostreremo nell’esercizio che segue, proposto a titolo esemplificativo.

2.3.1 Esercizio

Una scala di massa m e lunghezza L , avente N *pioli*, è appoggiata (nel suo punto estremo B) ad una parete liscia verticale. L’altro estremo A è invece a contatto col piano orizzontale; tra piano e scala è presente una forza di attrito (statico) caratterizzata da un coefficiente μ_s . L’angolo (acuto) tra scala e piano orizzontale sia α . Con i dati a disposizione si determini:

1. il massimo numero n di pioli che può salire un uomo di massa M , senza far cadere la scala;
2. quanto sarebbe dovuto essere il minimo coefficiente di attrito statico $\tilde{\mu}_s$ per permettere all’uomo di salire fino in cima alla scala (cioè tutti gli N pioli)?

Svolgimento:

Nel problema proposto c’è solo una *fase temporale*¹³, statica, nella quale possiamo considerare un unico *sottosistema*, costituito dall’insieme “scala+uomo”.

¹³Si veda lo “Schema (Generale) di Risoluzione di un Problema di Meccanica” dato in *Appendice 2.10*.

La scelta del sistema di riferimento è evidente: assi cartesiani paralleli al piano orizzontale (asse x) e alla parete verticale (asse y), ed origine nel loro *punto* d'intersezione. Le forze agenti sono le seguenti:

- le forze peso di M ed m , dirette verso il basso e applicate nei rispettivi *baricentri*: la posizione P (*incognita*) che può raggiungere l'uomo sulla scala per $M\mathbf{g}$, e il centro della scala G per $m\mathbf{g}$;
- le *Reazioni Vincolari* della parete $\mathbf{R}_B = R_B \hat{\mathbf{i}}$ e del piano orizzontale $\mathbf{R}_A = R_A \hat{\mathbf{j}}$;
- la forza di attrito $F_s \leq \mu_s R_A$, applicata in A e diretta verso l'origine degli assi (cioè verso $-\hat{\mathbf{i}}$);

dove si è tenuto conto che le *reazioni* dovute ad un “vincolo di appoggio”, come già detto nel §2.1, sono sempre perpendicolari al piano tangente¹⁴. Si noti che la scelta di un unico *sottosistema* ci evita di dover introdurre le *forze interne*, cioè la forza esercitata dall'uomo sulla scala ($\mathbf{R}_{M \rightarrow m}$) e viceversa ($\mathbf{R}_{m \rightarrow M}$), che si annullano a vicenda in virtù del *Terzo Principio* (2.2).

La Prima equazione Cardinale della Statica (2.39) per il presente sistema è quindi:

$$\mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B + (M + m)\mathbf{g} + \mathbf{F}_s = 0, \quad (2.44)$$

che scomposta nelle direzioni x e y dà:

$$\begin{cases} R_B - F_s = 0, \\ R_A - (M + m)g = 0. \end{cases} \quad (2.45)$$

Scegliendo come *Polo* il punto A ai piedi della scala¹⁵, la Seconda equazione Cardinale (2.43), porta alla seguente condizione:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{M}_A = \vec{AG} \wedge m\mathbf{g} + \vec{AP} \wedge M\mathbf{g} + \vec{AB} \wedge \mathbf{R}_B = \\ &= \frac{L}{2} (-\hat{\mathbf{i}} \cos \alpha + \hat{\mathbf{j}} \sin \alpha) \wedge (-mg)\hat{\mathbf{j}} + \xi (-\hat{\mathbf{i}} \cos \alpha + \hat{\mathbf{j}} \sin \alpha) \wedge (-Mg)\hat{\mathbf{j}} + \\ &\quad + L (-\hat{\mathbf{i}} \cos \alpha + \hat{\mathbf{j}} \sin \alpha) \wedge R_B \hat{\mathbf{i}} = \\ &= \hat{\mathbf{k}} \left\{ (mg \frac{L}{2} + Mg\xi) \cos \alpha - R_B L \sin \alpha \right\}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

dove si è posto $\xi = |AP|$. Dalle (2.45) e dalla definizione della forza di attrito statico, si ottiene che:

$$R_B = F_s \leq \mu_s R_A = \mu_s (M + m)g, \quad (2.47)$$

la cui sostituzione nella (2.46) porta al risultato:

¹⁴Dell'eventuale presenza di attrito, come nel presente caso, si tiene conto introducendo esplicitamente la relativa forza (\mathbf{F}_s), che di fatto, non è che una *componente tangenziale* della reazione vincolare.

¹⁵In questo modo sono nulli i momenti sia della forza di attrito che della reazione vincolare R_A .

$$\xi \leq L \left\{ \mu_s \left(1 + \frac{m}{M} \right) \tan \alpha - \frac{m}{2M} \right\}, \quad (2.48)$$

da cui si deduce che il massimo numero di pioli che l'uomo può salire senza far cadere la scala è dato dalla seguente formula:

$$n = N \left\{ \mu_s \left(1 + \frac{m}{M} \right) \tan \alpha - \frac{m}{2M} \right\}. \quad (2.49)$$

Infine, per determinare il valore minimo che dovrebbe avere il coefficiente di attrito statico per permettere all'uomo di salire fino in cima alla scala, è sufficiente porre $\xi = L$ nella (2.48) ed esplicitare μ_s ; in questo modo si trova:

$$\mu_s \geq \frac{1}{2} \left(\frac{2M + m}{M + m} \right) \cot \alpha. \quad (2.50)$$

2.4 Dinamica dei Sistemi di punti materiali

Vogliamo adesso trattare la Dinamica di un sistema (discreto) di punti materiali. Come abbiamo visto nel § 2.3, dove ci siamo occupati della Statica, non è in generale sufficiente considerare i gradi di libertà *traslazionali*; ciò ci ha portati alla Seconda equazione Cardinale della Statica (2.43), relativa ai gradi di libertà *rotazionali*. Evidentemente, la stessa cosa va ripetuta per la Dinamica. L'eq.(2.1), estesa al caso di un sistema di punti materiali, permette solo di determinare l'accelerazione *lineare* dell'intero sistema, ma non quella *rotazionale*. Dovremo perciò cercare la legge che descrive la dinamica rotazionale dei sistemi.

Iniziamo con l'estensione della Legge di Newton (2.1) ad un sistema di punti materiali di masse m_i posti nei punti P_i (di raggi vettore $\mathbf{r}_i \equiv \vec{OP}_i$) dello spazio. Sia $\mathbf{F}_{(ext)i}$ la risultante delle *forze esterne*¹⁶ agenti sul generico (i -esimo) punto materiale P_i , e sia $\mathbf{F}_{j \rightarrow i}$ la forza *interna* che esso subisce da parte di un altro (j -esimo, con $j \neq i$) punto materiale P_j interno al sistema. Allora, la (2.1) applicata a tale punto materiale (i -esimo) dà:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{(ext)i} + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{j \rightarrow i} = m_i \mathbf{a}_i. \quad (2.51)$$

Sommando su tutti i punti materiali del sistema si ha perciò:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{F}_{(ext)i} = \mathbf{F}_{ext} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i = M \mathbf{a}_G, \quad (2.52)$$

dove si è usato il fatto che la somma di tutte le forze interne è nulla per il “principio di azione e reazione” (2.2): $\sum_{i,j} \mathbf{F}_{i \rightarrow j} = 0$, e dove si è definito il raggio vettore del “Centro di Massa” come:

¹⁶Si intende per esterna una forza non dovuta agli altri punti materiali che costituiscono il sistema.

$$\vec{OG} \equiv \mathbf{r}_G = \frac{\sum_i m_i \vec{OP}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{OP}_i, \quad (2.53)$$

essendo $M = \sum_i m_i$ la massa totale del sistema. Infatti, derivando rispetto al tempo, si può scrivere:

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{OP}_i = \sum_i m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_O) = \sum_i m_i \mathbf{v}_i - M \mathbf{v}_O = M \frac{d}{dt} (\vec{OG}) = M (\mathbf{v}_G - \mathbf{v}_O), \quad (2.54)$$

da cui:

$$\mathbf{Q} =: \sum_i m_i \mathbf{v}_i = M \mathbf{v}_G. \quad (2.55)$$

Vediamo quindi che il vettore della “Quantità di Moto” \mathbf{Q} dell’intero sistema così definito (somma delle quantità di moto delle singole *particelle*) è uguale al prodotto della massa totale per la velocità del *Centro di Massa*. Derivando di nuovo, perciò, si arriva a capire come si sia arrivati a poter esprimere l’eq.(2.52) in termini dell’accelerazione di questo stesso punto. In forma compatta, quindi, possiamo concludere che la *Prima equazione Cardinale* della Dinamica dei Sistemi può scriversi:

$$\dot{\mathbf{Q}} = M \mathbf{a}_G = \mathbf{F}_{ext}. \quad (2.56)$$

Conseguenza diretta di questa equazione è la “Conservazione della Quantità di Moto” per un sistema *Isolato*, cioè per un sistema sul quale la risultante delle forze esterne è nulla; conservazione che, evidentemente, può anche valere componente per componente, nel senso che, se il sistema è isolato in una certa direzione (di versore) $\hat{\mathbf{n}}$ (e quindi $\mathbf{F}_{ext} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$), allora si conserva la corrispondente componente della quantità di moto: $\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{n}} \equiv Q_n = \text{costante}$.

Per arrivare alla *Seconda equazione Cardinale* dei sistemi partiamo dall’equazione del moto per la singola particella, eq.(2.51), e dalla definizione di *Momento* di una forza dato nella (2.40); sommando su tutti i punti materiali del sistema e tenendo presente l’annullamento del contributo dovuto alle forze *interne*, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &\equiv \sum_i \vec{OP}_i \wedge \mathbf{F}_{(ext)i} = \sum_i m_i \vec{OP}_i \wedge \mathbf{a}_i = \\ &= \frac{d}{dt} \sum_i \vec{OP}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i - \sum_i \frac{d}{dt} (\vec{OP}_i) \wedge m_i \mathbf{v}_i = \\ &= \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} - \sum_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_O) \wedge m_i \mathbf{v}_i = \\ &= \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} + \mathbf{v}_O \wedge \mathbf{Q}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

dove si è definito il vettore \mathbf{L}_O del “Momento della Quantità di Moto” del sistema, detto anche “Momento Angolare”, come:

$$\mathbf{L}_O = \sum_i \vec{OP}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i. \quad (2.58)$$

Il secondo termine a destra nell’eq.(2.57), detto *Termine del Polo Mobile*, scompare se scegliamo come polo il *Centro di Massa* ($O \equiv G$) o un qualsiasi punto *fisso* ($\mathbf{v}_O = 0$):

$$\mathbf{M}_O = \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} \quad (\text{se } O = G, \text{ o se } \mathbf{v}_O = 0). \quad (2.59)$$

Più avanti vedremo come si può calcolare il *Momento Angolare* per una specifica classe di sistemi di punti materiali, i “corpi rigidi” (sia *discreti* che *continui*). Similmente a quanto detto sulla *Conservazione della Quantità di Moto* in relazione alla Prima Equazione Cardinale (2.56), possiamo vedere che anche la *Seconda*, eq.(2.59), prevede come corollario la *Conservazione del Momento Angolare* per un sistema “rotazionalmente isolato”, cioè un sistema per il quale è nullo il *Momento* (risultante) delle forze esterne.

2.4.1 Sistemi a Massa Variabile: il Moto del Razzo

Vogliamo studiare il moto di un razzo, la cui forza propulsiva, come ora dimostreremo, è dovuta al gas espulso. Per ottenere la relativa equazione del moto, consideriamo il razzo ad un determinato istante t , in cui la velocità è $\mathbf{V} = V \hat{\mathbf{i}}$ (diretta nel verso positivo dell’asse x di un opportuno sistema di coordinate) e la sua massa (variabile) è M . Sia dm la massa di gas che esso espelle (in un tempo infinitesimo dt) con una velocità *relativa* $\mathbf{v}_r = -|v_r| \hat{\mathbf{i}}$ (il gas viene espulso nella direzione opposta a quella del moto, per provocare un’accelerazione in avanti del razzo stesso). Poiché il sistema è *isolato*, per quanto visto nel paragrafo precedente §2.4, si ha la conservazione della Quantità di Moto. All’istante t si ha semplicemente $\mathbf{Q}(t) = M \mathbf{V} = M V \hat{\mathbf{i}}$, dovuto al solo razzo, mentre all’istante $t + dt$, al contributo del razzo di massa $M - dm$ con velocità $\mathbf{V} + d\mathbf{V}$, si deve aggiungere quello del gas espulso, di massa dm e velocità (*assoluta*) $\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{V}$. La conservazione di \mathbf{Q} si traduce allora nella seguente formula:

$$\mathbf{Q}(t) = M \mathbf{V} = \mathbf{Q}(t + dt) = (M - dm) (\mathbf{V} + d\mathbf{V}) + dm (\mathbf{v}_r + \mathbf{V}),$$

da cui, trascurando il termine di ordine superiore al primo ($-dm d\mathbf{V}$), si ottiene:

$$M d\mathbf{V} + dm \mathbf{v}_r = 0, \quad (2.60)$$

ovvero, *dividendo* per dt e scrivendo l’equazione in modo scalare (essendo $\mathbf{v}_r = -|v_r| \hat{\mathbf{i}}$):

$$M \frac{dV}{dt} = |v_r| \frac{dm}{dt} \equiv \mu |v_r|, \quad (2.61)$$

dove si è posto $\mu = dm/dt$. Questa è l'equazione del moto del razzo, dalla cui integrazione possiamo ottenere la velocità $V(t)$. Supponiamo, per esempio, che il razzo parta da fermo e che μ sia costante, cosicché, detta M_0 la sua massa iniziale (cioè all'istante $t = 0$), si possa scrivere $M(t) = M_0 - \mu t$. In questo caso l'eq.(2.61) risulta essere un'equazione differenziale a variabili separabili che può essere facilmente integrata; si trova, così:

$$(M_0 - \mu t) dV = \mu |v_r| dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^{V(t)} dV = \mu |v_r| \int_0^t \frac{dt}{M_0 - \mu t} \quad \Rightarrow$$

$$V(t) = |v_r| \log \left(\frac{M_0}{M_0 - \mu t} \right) = -|v_r| \log \left(1 - \frac{\mu t}{M_0} \right). \quad (2.62)$$

Da ciò possiamo dedurre, per esempio, la massima velocità raggiungibile da un razzo per il quale la massa (iniziale) di *carburante* costituisce una frazione X di quella totale; dall'eq.(2.62) si trova infatti che il razzo *consumerà* l'intero quantitativo di gas propulsivo in un tempo (finito) pari a $t_* = X M_0/\mu$, istante in cui avrà raggiunto la massima velocità, che quindi risulta essere:

$$V_{max} = -|v_r| \log(1 - X).$$

2.5 Impulso e Quantità di Moto

Probabilmente, il primo significativo allontanamento dalla Fisica Aristotelica, antecedente alla Rivoluzione newtoniano-galileiana del XVII secolo, si ebbe con la “Teoria dell’*Impetus*”, o Impeto, sviluppata nel XIV secolo ad opera del già citato filosofo parigino Buridano¹⁷. Essenzialmente l’*Impeto* era una *qualità* che veniva impressa ad un corpo da una forza, responsabile del mantenimento dello stato di moto anche quando la forza era cessata; per citare un classico esempio, era l’Impeto che spiegava come una freccia (o una lancia) potesse continuare a muoversi anche dopo aver lasciato la mano che l’aveva lanciata. Ricordiamo che nell’ambito della fisica aristotelica, invece, si attribuiva alle proprietà del mezzo in cui avveniva il moto tale causa: in qualche modo (anche piuttosto fantasioso) era l’aria che, spostata dalla freccia stessa che avanzava, a sua volta la spingeva ancora in avanti! Non era ancora stato scoperto il *Principio d’Inerzia*. L’Impeto di Buridano era in qualche modo proporzionale sia al peso del corpo in moto che alla sua velocità, il che lo rende essenzialmente identico ai moderni concetti di “quantità di moto” (o “momentum”, in inglese) e *Impulso*.

La definizione *moderna* dell’Impulso è la seguente: Data una forza \mathbf{F} (eventualmente variabile nel tempo) agente su un certo sistema, il suo *Impulso*, tra gli istanti t_1 e t_2 , è dato da:

¹⁷Per un’approfondito studio della “Teoria dell’Impeto” di Buridano si veda, per esempio, la già citata opera di M. Clagett, *La Meccanica nel Medioevo*, Feltrinelli.

$$\mathbf{I}(t_1, t_2) =: \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) dt. \quad (2.63)$$

Da questa definizione potremo dire che “l’Impulso di una forza è quella grandezza che quantifica l’effetto del suo protrarsi nel tempo”.

L’Impulso *totale*, somma degli impulsi di tutte le forze (esterne), è uguale ovviamente a quello della *Forza Risultante* \mathbf{F}_{ext} , per la quale vale la (2.56), per cui possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{tot}(t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{ext} dt = \int_{t_1}^{t_2} M \mathbf{a}_G dt = \int_{\mathbf{v}_G(t_1)}^{\mathbf{v}_G(t_2)} M d\mathbf{v}_G = \\ &= M \mathbf{v}_G(t_2) - M \mathbf{v}_G(t_1) \equiv \Delta \mathbf{Q}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Questo è il “Teorema dell’Impulso” (o “della Quantità di Moto”), secondo il quale “l’Impulso totale agente su un sistema è uguale alla variazione della sua Quantità di Moto”. Di nuovo, come corollario, ritroviamo la *Legge di Conservazione* di \mathbf{Q} per i *sistemi isolati*, cioè quando $\mathbf{I}_{tot} = 0$.

2.6 Lavoro ed Energia

Altri concetti fondamentali per lo studio dei sistemi dinamici sono quelli di “lavoro” ed *Energia*. Iniziamo col dare la definizione del primo. Data una forza \mathbf{F} che agisce su un punto materiale durante un suo certo spostamento *infinitesimo* $\delta \mathbf{r}$, si definisce “lavoro (infinitesimo) compiuto da tale forza” il prodotto scalare:

$$\delta L = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} = F \delta r \cos \alpha, \quad (2.65)$$

essendo α l’angolo compreso tra \mathbf{F} e $\delta \mathbf{r}$. Ne consegue che il lavoro è nullo se la forza è perpendicolare allo spostamento, mentre è positivo se l’angolo α è *acuto* ($< 90^\circ$), e negativo se è *ottuso* ($> 90^\circ$).

Per uno spostamento *finito* da un punto A ad un punto B dello spazio, effettuato lungo una qualche curva γ , il lavoro compiuto dalla forza \mathbf{F} è quindi dato dal seguente integrale *di linea*:

$$L_\gamma(\mathbf{F}; A \rightarrow B) =: \int_{A_\gamma}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (2.66)$$

in generale dipendente esplicitamente dal particolare percorso γ . Dalla sua stessa definizione, analogamente all’interpretazione data in precedenza per l’*Impulso*, possiamo affermare che “il lavoro compiuto da una forza quantifica l’effetto del suo protrarsi nello spazio” (durante lo spostamento del sistema).

Come nel caso dell’Impulso, consideriamo il lavoro *totale* compiuto sul singolo punto materiale (*i*-esimo) dalle sole forze esterne¹⁸. Utilizzando l’eq.(2.51) possiamo allora scrivere:

¹⁸Il lavoro di tutte le forze *interne*, ovviamente, si annulla, sommando su tutte le particelle del sistema.

$$\begin{aligned}
L_{(tot)i_\gamma}(A \rightarrow B) &= \int_{A_\gamma}^B \mathbf{F}_{(ext)i} \cdot d\mathbf{r}_i = \int_{A_\gamma}^B m_i \mathbf{a}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \int_{A_\gamma}^B m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot d\mathbf{r}_i = \\
&= \int_{A_\gamma}^B m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} dt = \int_{A_\gamma}^B m_i \mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{v}_i = \\
&= \frac{1}{2} m_i v_i(B)^2 - \frac{1}{2} m_i v_i(A)^2 \equiv \Delta E_{c(i)},
\end{aligned} \tag{2.67}$$

dove si è definita l'*Energia Cinetica* di ciascuna particella come:

$$E_{c(i)} = \frac{1}{2} m_i v_i^2. \tag{2.68}$$

Sommando infine la (2.67) su tutte le particelle del sistema si ottiene quindi:

$$L_{tot_\gamma}(A \rightarrow B) = \Delta E_c, \tag{2.69}$$

dove, naturalmente,

$$E_c = \sum_i E_{c(i)} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2, \tag{2.70}$$

è l'energia cinetica *totale*. Il risultato (2.69) è noto come “Teorema dell'Energia Cinetica” (o “Teorema delle *Forze Vive*”), ed ha spesso un ruolo importante nella risoluzione dei problemi di meccanica.

2.6.1 Forze Conservative ed Energia Potenziale

Come abbiamo già detto, in generale il lavoro compiuto da una forza dipende dal particolare percorso γ effettuato. È così, per esempio, per le forze di attrito. Esistono tuttavia forze per le quali, invece, il lavoro compiuto dipende soltanto dai punti estremi A e B . Tali forze sono dette “conservative”. Per esse si può allora esprimere il lavoro compiuto come differenza di una *funzione scalare* detta “Energia Potenziale”:

$$L_{cons}(A \rightarrow B) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} =: -\{U(B) - U(A)\} \equiv -\Delta U, \tag{2.71}$$

la cui espressione esplicita dipende naturalmente dalla particolare forza (conservativa) alla quale è associata. È da notare che, dalla sua stessa definizione, questa funzione risulta essere definita sempre a meno di una costante additiva arbitraria.

Conseguenza diretta dell'indipendenza dal percorso del lavoro compiuto da queste forze è che per esse è sempre nulla la cosiddetta *Circuitazione*¹⁹:

¹⁹Questo fatto ci permette di identificare le forze conservative con quelle “Irrotazionali”, per le quali cioè è nullo il *Rotore*: $\nabla \wedge \mathbf{F} = 0$; nel §5.2 torneremo su questo argomento fornendo i necessari elementi di *Analisi Vettoriale*.

$$\mathcal{C}_\gamma(\mathbf{F}) =: \oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (2.72)$$

ovvero, è nullo il lavoro per ogni percorso chiuso γ . La formula inversa della (2.71) permette altresì di esprimere la forza \mathbf{F} in termini dell'energia potenziale associata²⁰:

$$\mathbf{F} = -\nabla U \equiv -\left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial U}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial U}{\partial z}\right), \quad (2.73)$$

dove si è espresso l'operatore "nabla" (∇) in coordinate cartesiane (eq.(5.23)).

Esempi notevoli di forze conservative sono la forza di gravità, sia quella vicino alla superficie terrestre ($m\mathbf{g}$) che quella *Universale* di Newton, e la forza elastica espressa dalla legge di Hooke. Le espressioni delle corrispondenti energie potenziali possono essere facilmente ottenute applicando la definizione (2.71). Si trovano così i seguenti risultati:

- $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$:

$$\begin{aligned} U_g(B) - U_g(A) &= -\int_A^B m\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = -\int_A^B (-mg)\hat{\mathbf{j}} \cdot d\mathbf{r} = \\ &= mg \int_{y_A}^{y_B} dy = mg(y_B - y_A), \end{aligned} \quad (2.74)$$

dalla quale deduciamo che l'energia potenziale gravitazionale di un corpo che si trova ad una altezza h può essere scritta, *a meno di una costante additiva arbitraria*, come:

$$U_g(h) = mgh. \quad (2.75)$$

- $\mathbf{F}_G = -\frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$:

$$\begin{aligned} U_G(B) - U_G(A) &= -\int_A^B -\frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = GMm \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr = \\ &= -\frac{GMm}{r_B} + \frac{GMm}{r_A}, \end{aligned} \quad (2.76)$$

per cui possiamo scrivere (ponendo $U_G(r \rightarrow \infty) = 0$):

²⁰Come vedremo meglio nel §5.2, l'applicazione dell'operatore "nabla" su una funzione scalare U , come nella (2.73), dà come risultato un vettore, detto "gradiente" della stessa funzione U .

$$U_G(r) = -\frac{GMm}{r}. \quad (2.77)$$

- $F_e = -K \Delta l = -K(l - l_0)$:

$$\begin{aligned} U_e(l_B) - U_e(l_A) &= -\int_{l_A}^{l_B} -K(l - l_0)dl = K \int_{\xi_A}^{\xi_B} \xi d\xi = \frac{1}{2}K(\xi_B^2 - \xi_A^2) = \\ &= \frac{1}{2}K(l_B - l_0)^2 - \frac{1}{2}K(l_A - l_0)^2, \end{aligned} \quad (2.78)$$

da cui:

$$U_e(l) = \frac{1}{2}K(l - l_0)^2. \quad (2.79)$$

2.6.2 Conservazione dell'Energia Meccanica

In presenza di Forze Conservative, il Teorema dell'Energia Cinetica (2.69) si può esprimere come segue:

$$L_{tot,\gamma}(A \rightarrow B) = L_{cons}(A \rightarrow B) + L_{non\ cons,\gamma}(A \rightarrow B) = \Delta E_c, \quad (2.80)$$

da cui, utilizzando la (2.71), si ottiene:

$$\Delta E_c + \Delta U \equiv \Delta E = L_{non\ cons,\gamma}, \quad (2.81)$$

dove si è definita l'*Energia Meccanica E* come somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale:

$$E =: E_c + U. \quad (2.82)$$

L'eq.(2.81) rappresenta il “Teorema dell'Energia Cinetica *Generalizzato*”. Da questo si deduce allora il seguente importante risultato: per un sistema *Conservativo*, cioè un sistema sul quale solo forze conservative compiono lavoro (cosicché $L_{non\ cons,\gamma} = 0$), l'*Energia Meccanica E* si conserva:

$$E = E_c + U = \text{costante}, \quad (\text{se il sistema è conservativo}). \quad (2.83)$$

Questa è la ben nota “Legge di conservazione dell'Energia Meccanica”²¹.

Tipicamente, se non sono presenti forze dissipative o di attrito che compiono lavoro²² il sistema è conservativo e l'energia meccanica resta costante nel tempo.

²¹In realtà, si può dimostrare che, l'Energia *Totale*, somma di tutti i tipi di energia, non solo meccanica, è sempre conservata in natura, come conseguenza dell'*omogeneità* del tempo, ovvero dell'invarianza delle leggi fisiche per traslazioni temporali.

²²Come vedremo nel §2.8.4, è possibile che siano presenti forze di attrito che tuttavia non compiono lavoro, come nella situazione di *Puro Rotolamento*; in tal caso il sistema è ancora conservativo, e l'energia meccanica è conservata.

2.6.3 Energia Potenziale ed Equilibrio

Nel §2.3 abbiamo visto come l'equilibrio di un sistema meccanico possa essere determinato attraverso le due equazioni Cardinali della Statica, eq.(2.39) e (2.43). Questo metodo, tuttavia, non fornisce alcuna informazione sulla *stabilità* o meno di tale equilibrio. Ricordiamo che una certa configurazione di equilibrio è detta "stabile" se apportando ad essa piccole variazioni, per esempio piccoli *spostamenti* alle parti che costituiscono il sistema, quest'ultimo tende a tornare a tale stato di equilibrio iniziale. Al contrario, parleremo di equilibrio "instabile" se invece tende ad allontanarsene. Per avere informazioni sulla stabilità di un certo equilibrio, almeno per sistemi conservativi, possiamo utilizzare l'Energia Potenziale.

Limitandoci al semplice caso di un sistema conservativo *unidimensionale* (descritto da un'unica coordinata spaziale x), potremo esprimere l'energia, somma dell'energia cinetica e di quella potenziale, come

$$E = E_c + U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x). \quad (2.84)$$

Se x_e corrisponde alla *posizione di equilibrio*, deve aversi:

$$F(x_e) = - \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x_e} \equiv -U'(x_e) = 0, \quad (2.85)$$

dove si è utilizzata la relazione tra forza ed energia potenziale data dalla (2.73). Per configurazioni sufficientemente vicine a quella di equilibrio, per le quali cioè $|x - x_e| \ll |x_e|$, possiamo *sviluppare* in serie (di potenze di $x - x_e$) l'energia potenziale $U(x)$, ottenendo:

$$\begin{aligned} U(x) &= U(x_e) + U'(x_e)(x - x_e) + \frac{1}{2} U''(x_e)(x - x_e)^2 + \dots = \\ &= U(x_e) + \frac{1}{2} K (x - x_e)^2 + \dots, \end{aligned} \quad (2.86)$$

dove si è posto $K \equiv U''(x_e)$. La forza corrispondente è quindi data da:

$$F(x) = -U'(x) = -K(x - x_e) + \dots \quad (2.87)$$

Nel caso in cui sia $K > 0$, e trascurando i termini di ordine superiore (rappresentati dai "..."), riconosciamo in questa espressione proprio la "Forza Elastica" data dalla *Legge di Hooke*, che come si è visto nel §1.4 porta ad *oscillazioni* del sistema attorno alla posizione di equilibrio $x = x_e$ con *pulsazione*:

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{K}{m}}. \quad (2.88)$$

Questo significa che $x = x_e$ è in effetti un punto di *equilibrio stabile* solo se rappresenta un punto di *minimo* dell'energia potenziale, cioè se: $U'(x_e) = 0$; $U''(x_e) > 0$. D'altra parte, se invece $U'(x_e) = 0$; $U''(x_e) < 0$, si ha che in $x = x_e$ abbiamo un *massimo* di $U(x)$, ed in tal caso x_e è allora un punto di *equilibrio instabile*.

Prima di vederne un esempio osserviamo come, almeno per sistemi conservativi unidimensionali, si possa ottenere l'*equazione del moto* derivando rispetto al tempo l'espressione dell'energia meccanica; infatti, essendo E in tal caso una *costante*, dalla (2.84) si ottiene:

$$\frac{dE}{dt} = 0 = m \dot{x} \ddot{x} + U'(x) \dot{x} \quad (2.89)$$

da cui:

$$m \ddot{x} = -U'(x) \equiv F(x), \quad (2.90)$$

che è la usuale *Legge di Newton*.

2.6.4 Esercizio

Una *pallina* di dimensioni trascurabili e massa m è vincolata a muoversi su una guida circolare rigida (liscia) di raggio R e centro O , posta in un piano verticale. Una molla ideale di costante elastica K e lunghezza a riposo trascurabile collega la pallina al punto più alto (A) della guida, posto a distanza R al di sopra del centro O . La generica posizione (P) della pallina sulla guida sia descritta dall'angolo polare θ che il raggio OP forma con la verticale discendente passante per O .

1. Si determini le posizioni di equilibrio della pallina, precisandone la *natura* ("stabile" o "instabile"), in funzione dei dati del problema (*e.g.*, al variare della costante elastica K della molla).
2. Si chiede se è possibile che la pallina abbia un moto circolare uniforme sulla guida, per qualche particolare scelta dei dati.
3. Nel caso in cui il punto più basso della guida B ($\theta = 0$) sia di equilibrio stabile per la pallina, si determini il periodo delle *piccole* oscillazioni attorno ad esso.

Svolgimento:

Come si è detto nel §2.6.3, i punti di equilibrio del sistema corrispondono ai punti stazionari dell'energia potenziale. Questa è data dalla somma dell'energia potenziale elastica e di quella gravitazionale, entrambe esprimibili in funzione dell'angolo θ ; si trova così:

$$\begin{aligned} U(\theta) &= -m g R \cos \theta + \frac{1}{2} K \left(2 R \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 = \\ &= (KR - m g) R \cos \theta, \end{aligned} \quad (2.91)$$

dove si è tenuto conto che, essendo U definita a meno di una costante additiva arbitraria, i termini *costanti* possono essere eliminati. Cerchiamo quindi i punti

stazionari di questa funzione; derivando U rispetto all'angolo θ , e uguagliando a zero, si ha:

$$U'(\theta) \equiv \frac{dU}{d\theta} = (mg - KR)R \sin \theta = 0. \quad (2.92)$$

Da questa equazione deduciamo innanzitutto che se K assume il particolare valore $K = K^* \equiv mg/R$, allora la forza $F(\theta) \equiv -U'(\theta)/R$ è nulla per ogni valore dell'angolo θ , dando perciò la possibilità di avere un moto circolare uniforme lungo la guida, come richiesto al quesito 2. Per $K \neq K^*$, d'altra parte, si ottengono due soluzioni, corrispondenti ai punti A (per $\theta = \pi$) e B (per $\theta = 0$). Per capire se si tratta di punti di equilibrio stabile o instabile, dobbiamo capire se sono punti di minimo o di massimo di $U(x)$, rispettivamente. A tal fine, calcolandoci la derivata seconda:

$$U''(x) = (mg - KR) \cos \theta, \quad (2.93)$$

troviamo che:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \equiv (\theta = \pi) : U''(A) = KR - mg \quad \left\{ \begin{array}{l} > 0 \text{ se } K > K^*; \text{ (equil. stabile),} \\ < 0 \text{ se } K < K^*; \text{ (equil. instabile),} \end{array} \right. \\ \\ B \equiv (\theta = 0) : U''(B) = mg - KR \quad \left\{ \begin{array}{l} > 0 \text{ se } K < K^*; \text{ (equil. stabile),} \\ < 0 \text{ se } K > K^*; \text{ (equil. instabile).} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.94)$$

Per determinare il Periodo delle *piccole* oscillazioni attorno al punto più basso della guida, il punto $B(\theta = 0)$, occorre naturalmente supporre che questo sia di equilibrio *stabile*, ovvero che $K < K^*$. Come abbiamo visto nel §2.6.3 (eq.(2.89) e (2.90)), essendo il sistema *conservativo*, l'equazione del moto può essere ottenuta anche partendo dall'energia (che è costante). Poiché la velocità della pallina sulla guida è data da $v = R\dot{\theta}$, possiamo scrivere l'energia meccanica come:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + U(x) = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + (KR - mg)R \cos \theta, \quad (2.95)$$

per cui, derivando rispetto al tempo t , si arriva a:

$$0 = \frac{dE}{dt} = m R^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + (mg - KR)R \dot{\theta} \sin \theta, \quad (2.96)$$

da cui si ottiene la seguente equazione del moto:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \frac{K}{m} \right) \sin \theta = 0. \quad (2.97)$$

Trattandosi, per ipotesi, di *piccole oscillazioni* attorno al punto di equilibrio $B(\theta = 0)$, possiamo *linearizzare* questa equazione: $|\theta| \ll 1$, per cui $\sin \theta \simeq \theta$, con cui si arriva all'equazione del moto armonico (eq.(1.17)):

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0, \quad (2.98)$$

con *pulsazione*:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{R} - \frac{K}{m}}, \quad (2.99)$$

e *periodo*:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mR}{mg - KR}}. \quad (2.100)$$

2.7 Fase Impulsiva ed Urti

2.7.1 Le Equazioni Cardinali in Fase Impulsiva

Fa parte dell'esperienza quotidiana l'osservazione di forze che, pur agendo per un tempo brevissimo, hanno effetti molto importanti sul sistema sul quale sono applicate. Basti pensare, ad esempio, ad una pallina da tennis colpita dalla racchetta o ad un pallone colpito dal piede del calciatore. In generale, fenomeni associati agli *urti* (o alle *esplosioni*). Tali "fasi temporali" sono dette *impulsive*. Non è possibile trattare queste situazioni con le leggi del moto così come le abbiamo scritte nelle eq.(2.56) e (2.57). In questo paragrafo vedremo quindi come esprimere le due equazioni cardinali in modo da poter essere applicate in questi casi.

Nel §2.5 abbiamo definito l'*Impulso* di una forza attraverso l'integrale (2.63). Chiaramente, per qualsiasi forza *finita*, questo impulso tende a zero se anche l'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1 \rightarrow 0$; in tal caso la forza è detta "non-impulsiva". Le forze "impulsive" sono invece quelle per le quali esiste *finito e non-zero* il seguente limite:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^\tau \mathbf{F}_{imp}(t) dt \equiv \mathbf{I}_{imp}, \quad (2.101)$$

detto "Impulso della forza impulsiva" \mathbf{F}_{imp} .

Consideriamo quindi un generico sistema nel breve intervallo di tempo τ in cui è soggetto *anche* a questo tipo di forze. La prima Equazione Cardinale (2.56) si può scrivere, distinguendo le forze impulsive da quelle non-impulsive, come:

$$\mathbf{F}_{ext} = \mathbf{F}_{imp} + \mathbf{F}_{non imp} = M \mathbf{a}_G = M \frac{d\mathbf{v}_G}{dt}; \quad (2.102)$$

integrando rispetto al tempo (tra 0 e τ) e prendendo il limite per $\tau \rightarrow 0$, si ottiene:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^\tau \mathbf{F}_{imp}(t) dt + \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^\tau \mathbf{F}_{non imp}(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^\tau M \frac{d\mathbf{v}_G}{dt} dt, \quad (2.103)$$

da cui, tenendo conto che per definizione si annulla nel limite l'impulso delle forze non-impulsive, si arriva a:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^\tau \mathbf{F}_{imp}(t) dt = \mathbf{I}_{imp} = M \mathbf{v}_G(\tau) - M \mathbf{v}_G(0), \quad (2.104)$$

che può essere espressa più concisamente nella forma:

$$\mathbf{I}_{imp} = \Delta \mathbf{Q}, \quad (2.105)$$

dove si è tenuto conto della definizione di “Quantità di Moto” di un sistema data nella (2.55). L'eq.(2.105) è la “Prima Equazione Cardinale della Dinamica (in fase) Impulsiva”. Anche se appare del tutto simile all'espressione che rappresenta il Teorema dell'Impulso, eq.(2.64), le sue conseguenze sono molto significative. Innanzitutto porta a ciò che spesso viene detto *Approssimazione Impulsiva*²³, ovvero il fatto che in una fase impulsiva (e.g., in un urto) sono del tutto trascurabili tutte le forze non-impulsive, come la forza peso, le forze di attrito, e la forza elastica, ma anche le eventuali forze d'inerzia; questo significa, quindi, che l'eq.(2.105) può essere usata senza modifiche anche se si descrive il sistema rispetto ad un sistema di riferimento non-inerziale.

È infine possibile ottenere anche la “Seconda Equazione Cardinale (in fase) Impulsiva” applicando considerazioni simili all'eq.(2.57); possiamo infatti scrivere:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^\tau \sum_i \vec{O}P_i \wedge \mathbf{F}_{(imp)i} dt = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^\tau \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} dt + \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^\tau \mathbf{v}_O \wedge \mathbf{Q} dt, \quad (2.106)$$

da cui troviamo:

$$\sum_i \vec{O}P_i \wedge \mathbf{I}_{(imp)i} = \Delta \mathbf{L}_O, \quad (2.107)$$

dove, oltre ad aver trascurato il contributo di tutte le forze non-impulsive come abbiamo fatto nel caso delle (2.103) e (2.104), si è osservato che nel limite $\tau \rightarrow 0$ anche il *Termine del Polo Mobile* dà un contributo nullo. Di conseguenza, in fase impulsiva la scelta di un polo mobile o fisso non fa alcuna differenza.

2.7.2 Gli Urti

Classici esempi di *fasi impulsive* sono gli urti, sia tra particelle puntiformi che tra corpi materiali estesi. Gli urti sono, in generale, processi in cui le parti interagenti restano *a contatto* per un tempo infinitesimo, pur causando significative variazioni delle rispettive velocità (quantità di moto). Secondo la classificazione usuale, diremo che un urto è “elastico” se in esso si conserva l'*energia Cinetica*

²³Un altro aspetto dell'*Approssimazione Impulsiva*, consiste nel poter trascurare, durante tali fasi temporali, ogni *spostamento* nello spazio di tutte le parti che costituiscono il sistema; ragion per cui possiamo anche concludere che tutte le *Energie Potenziali* restano invariate.

totale dell'intero sistema²⁴; sarà quindi detto “anelastico” in caso contrario. In particolare, viene detto “completamente anelastico” un urto nel quale le parti interagenti restano unite. Vediamone qualche semplice esempio.

Iniziamo col considerare l'urto *completamente anelastico* di due blocchi, di masse m_1 ed m_2 , su un piano orizzontale. La velocità iniziale del primo sia $v_{1(0)}$ diretta verso il secondo, inizialmente fermo. Poiché il sistema è (orizzontalmente) *isolato*, ne consegue la conservazione della quantità di moto, per cui si ottiene:

$$m_1 v_{1(0)} = (m_1 + m_2) v_f \quad \Rightarrow \quad v_f = \frac{m_1 v_{1(0)}}{m_1 + m_2}, \quad (2.108)$$

dove si è tenuto conto che nello stato finale i due blocchi si muovono insieme, per definizione stessa di urto completamente anelastico.

Altro esempio è l'urto *elastico* tra gli stessi blocchi. Oltre ad avere ancora la conservazione della quantità di moto totale, abbiamo anche quella dell'energia cinetica. Ancora nell'ipotesi di blocco di massa m_2 inizialmente in quiete, si ha quindi il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} m_1 v_{1(0)} = m_1 v_1 + m_2 v_2, \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1(0)}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2, \end{cases} \quad (2.109)$$

la cui risoluzione porta ai seguenti risultati:

$$v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1(0)}, \quad v_2 = \left(\frac{2 m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1(0)}. \quad (2.110)$$

Interessante è il caso in cui le masse sono uguali: $m_1 = m_2$. In questo caso, infatti, si ottiene:

$$v_1 = 0, \quad v_2 = v_{1(0)}, \quad (2.111)$$

indicando come nell'urto elastico di due blocchi (particelle) di eguale massa, questi si *scambino* reciprocamente le velocità: il primo si ferma, mentre il secondo parte con la velocità che aveva inizialmente il primo.

2.8 Dinamica dei Sistemi Rigidi

In molti dei problemi trattati nei corsi di Meccanica (sia nel contesto della *Fisica Generale* che della *Meccanica Razionale*) si deve studiare la dinamica di una particolare classe di sistemi, i “Corpi Rigidi”. Questi, per definizione, sono sistemi (“continui” o “discreti”) di punti materiali per i quali le distanze relative restano invariate durante il moto. In questo paragrafo vedremo nello specifico come si possono scrivere in questo caso le equazioni Cardinali dei sistemi date al §2.4.

²⁴In realtà, in virtù dell'approssimazione impulsiva secondo la quale, non essendoci stati spostamenti spaziali del sistema, le energie potenziali sono automaticamente rimaste costanti, potremmo anche dire che nel caso di urto elastico tutta l'energia *meccanica* è rimasta invariata.

Il primo passo è dedurre la relazione che sussiste tra le velocità di punti distinti di un sistema rigido. Detti O e P due punti qualsiasi del sistema, la condizione di *rigidità* implica che la loro distanza sia costante nel tempo, per cui si ha:

$$0 = \frac{d}{dt} |\vec{OP}|^2 = 2\vec{OP} \cdot \frac{d}{dt}(\vec{OP}) = 2\vec{OP} \cdot (\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_O); \quad (2.112)$$

la conseguente perpendicolarità tra i due vettori significa che si può sempre scrivere:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \omega \wedge \vec{OP}, \quad (2.113)$$

dove il vettore ω è proprio il *vettore della velocità angolare* del sistema. La formula (2.113) è nota come “vincolo di corpo rigido”.

Le equazioni Cardinali (2.56) e (2.57) sono evidentemente ancora le stesse. Tuttavia, resta da vedere come si può esprimere il Momento Angolare alla luce della (2.113). Dalla stessa definizione (2.58), abbiamo²⁵:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_O &= \sum_i \vec{OP}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i' = \sum_i \vec{OP}_i \wedge m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_O) = \\ &= \sum_i \vec{OP}_i \wedge m_i (\omega \wedge \vec{OP}_i) = \\ &= \omega \sum_i m_i |\vec{OP}_i|^2 - \sum_i m_i \vec{OP}_i (\vec{OP}_i \cdot \omega); \end{aligned} \quad (2.114)$$

per sistemi *planari*²⁶ l'ultimo termine si annulla, poiché il vettore della velocità angolare ω è perpendicolare ai vettori \vec{OP}_i , per cui in definitiva troviamo:

$$\mathbf{L}_O = \mathcal{I}_O \omega, \quad (2.115)$$

dove si è definito il “Momento d’Inerzia” \mathcal{I}_O del sistema rispetto al *polo* O come:

$$\mathcal{I}_O = \sum_i m_i |\vec{OP}_i|^2. \quad (2.116)$$

Questa grandezza²⁷ descrive la *distribuzione della massa del sistema rispetto al polo* O , ovvero rispetto all’asse passante per O e perpendicolare al piano che contiene il sistema stesso. Per un sistema *continuo* l’eq.(2.116) si generalizza come segue:

²⁵Dove si è utilizzata la seguente *identità vettoriale*: $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, che ritroveremo nel §5.2.

²⁶In molti dei problemi i sistemi dinamici possono essere considerati planari.

²⁷Si precisa che quanto qui esposto vale nel caso di sistemi planari per i quali l’asse rispetto al quale vogliamo calcolare il momento d’inerzia è perpendicolare al sistema stesso. Nel caso generale di sistemi tridimensionali ed una arbitraria terna di assi cartesiani, il Momento d’Inerzia costituisce un *Tensore* simmetrico di *rango* 2, i cui elementi \mathcal{I}_{ij} , ($i, j = 1, 2, 3$), caratterizzano la distribuzione nello spazio delle masse del sistema, rispetto alla stessa terna di assi.

$$\mathcal{I}_O = \int dm r^2, \quad (2.117)$$

dove r indica la distanza dell'elemento di massa infinitesimo dm dal polo O .

2.8.1 Esempi di Momenti d'Inerzia

1. Momento d'Inerzia di un'asta omogenea

Vogliamo determinare il Momento d'Inerzia di una sottile asta omogenea (AB) di massa m e lunghezza l , dapprima rispetto al suo centro G (ovvero, rispetto ad un'asse passante per il suo centro G e perpendicolare all'asta stessa), e poi rispetto ad un suo estremo, diciamo A . Prendiamo l'asse x lungo l'asta con origine nel suo estremo A , cosicché l'altro suo estremo B corrisponde a $x_B = l$. Dalla definizione (2.117) vediamo che un elemento di massa infinitesimo $dm = m dx/l \equiv \lambda dx$ ($\lambda = m/l$ è la densità lineare di massa) dà un contributo al momento d'inerzia \mathcal{I}_G uguale a $d\mathcal{I}_G = dm x^2$; integrando su tutta l'asta si ottiene quindi:

$$\mathcal{I}_G = \int_{-l/2}^{l/2} \lambda x^2 dx = \frac{1}{12} m l^2; \quad (2.118)$$

per avere invece il momento d'inerzia rispetto all'estremo A dobbiamo integrare in x tra 0 e l :

$$\mathcal{I}_A = \int_0^l \lambda x^2 dx = \frac{1}{3} m l^2. \quad (2.119)$$

2. Momento d'Inerzia di un disco omogeneo

Per determinare il momento d'inerzia di un disco omogeneo di massa M e raggio R rispetto al suo asse passante per il centro O , possiamo sommare i contributi dovuti ad anelli di raggio variabile r e spessore infinitesimo dr ; la massa di ciascun anello è data da $dm = \sigma 2\pi r dr$, dove $\sigma = M/\pi R^2$ è la densità superficiale, per cui il suo contributo al momento d'inerzia è semplicemente $d\mathcal{I}_O = dm r^2$. Integrando in r tra 0 e il raggio del disco R , si ottiene perciò:

$$\mathcal{I}_O = \int_0^R \sigma 2\pi r^3 dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} M R^2. \quad (2.120)$$

2.8.2 Teorema di Huygens-Steiner e Teorema di König

Nella risoluzione di molti problemi di Dinamica relativi a Corpi Rigidi è spesso utile l'applicazione di due importanti teoremi. Il primo, detto *di Huygens-Steiner*, permette di calcolare il momento d'inerzia di un corpo rispetto ad un qualsiasi asse, conoscendo quello rispetto ad un asse ad esso parallelo ma passante per il centro di massa G . Vediamone la dimostrazione e l'enunciato in modo più preciso: il momento d'inerzia rispetto ad un punto O (di nuovo si sottintende che si tratta in realtà del momento d'inerzia rispetto ad un qualche asse passante per il punto O) è dato dalla (2.116), per cui possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_O &= \sum_i m_i |\vec{OP}_i|^2 = \sum_i m_i |\vec{OG} + \vec{GP}_i|^2 = \\ &= \sum_i m_i |\vec{OG}|^2 + \sum_i m_i |\vec{GP}_i|^2 + 2\vec{OG} \cdot \sum_i m_i \vec{GP}_i = \quad (2.121) \\ &= M d_{OG}^2 + \mathcal{I}_G, \end{aligned}$$

dove $d_{OG} = |OG|$ è la distanza tra i due punti (i due assi paralleli) e dove si è tenuto conto che $\sum_i m_i \vec{GP}_i = 0$. È facile verificare, per esempio, che quanto ottenuto nel §2.8.1 a proposito dei momenti d'inerzia dell'asta omogenea soddisfa il teorema. Infatti, si ha:

$$\mathcal{I}_A = \frac{1}{3} m l^2 = m d_{AG}^2 + \mathcal{I}_G = m \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} m l^2. \quad (2.122)$$

Il secondo teorema, detto *di König*, permette di esprimere l'energia cinetica di un corpo rigido in movimento come somma dell'energia cinetica di traslazione del suo centro di massa e dell'*Energia Cinetica di Rotazione* attorno a quest'ultimo. La sua dimostrazione è per certi aspetti simile a quella del teorema precedente di Huygens-Steiner. Sfruttando il *vincolo di corpo rigido* espresso dall'eq.(2.113) si può infatti scrivere:

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \wedge \vec{GP}_i|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_G^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i |GP_i|^2 + \mathbf{v}_G \cdot \boldsymbol{\omega} \wedge \sum_i m_i \vec{GP}_i = \\ &= \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \mathcal{I}_G \omega^2, \quad (2.123) \end{aligned}$$

dove si è di nuovo sfruttato il fatto che $\sum_i m_i \vec{GP}_i = 0$. Questo teorema è di fondamentale importanza quando consideriamo un sistema rigido nel quale durante il moto non ci sia alcun punto *fisso*. D'altra parte, se nel moto esiste invece un punto che resta fermo (per esempio, una *cerniera* fissa), allora l'energia

cinetica ha solo il contributo *rotazionale*, col momento d'inerzia definito rispetto allo stesso punto:

$$E_c = \frac{1}{2} \mathcal{I}_O \omega^2, \quad (\text{se } \mathbf{v}_O = 0). \quad (2.124)$$

2.8.3 Esercizio

Si consideri un sistema costituito da due aste rigide e omogenee OA e OB , di masse m e $2m$, e lunghezze l e $2l$, rispettivamente, saldate insieme ad angolo retto. Il sistema è incernierato su un asse orizzontale passante per il punto O (punto di *giunzione* delle due aste), ed è libero di oscillare in un piano verticale (contenente le aste stesse). Si determini:

1. l'energia potenziale del sistema $U(\phi)$, in funzione dell'angolo ϕ che l'asta più lunga OB forma con la verticale discendente;
2. l'angolo ϕ_e di equilibrio (stabile) del sistema;
3. il momento d'inerzia del sistema rispetto al *polo* O (*i.e.*, rispetto all'asse orizzontale passante per O);
4. l'energia cinetica del sistema in funzione dell'angolo ϕ e della velocità angolare $\dot{\phi}$;
5. se il sistema viene abbandonato (in quiete) dalla configurazione in cui $\phi = \pi/2$, si determini l'espressione della velocità angolare $\omega \equiv \dot{\phi}$ in funzione dell'angolo ϕ ;
6. l'equazione del moto che descrive l'evoluzione dinamica del sistema e il periodo delle *piccole oscillazioni* attorno alla posizione di equilibrio (stabile).

Svolgimento:

1. Il sistema ha un solo *grado di libertà*²⁸, e la sua configurazione spaziale può, come suggerito dal testo, essere descritta dall'angolo ϕ che l'asta più lunga OB forma con la verticale discendente. Il centro di massa dell'asta OA sia G_A (tale che $|OG_A| = l/2$) e quello dell'asta OB sia G_B (con $|OG_B| = l$). L'energia potenziale è solo gravitazionale e può essere scritta come:

$$U(\phi) = -mg \frac{l}{2} \sin \phi - 2mgl \cos \phi = -\frac{mgl}{2} (\sin \phi + 4 \cos \phi). \quad (2.125)$$

²⁸Il numero di gradi di libertà è uguale al numero di "coordinate generalizzate" necessario per descrivere la configurazione spaziale del sistema.

2. Le posizioni di equilibrio corrispondono, come spiegato nel §2.6.3, ai punti *stazionari* di $U(\phi)$, cioè ai valori dell'angolo ϕ per i quali si annulla la sua derivata prima; si trova così:

$$U'(\phi) = \frac{mgl}{2} (4 \sin \phi - \cos \phi) = 0, \quad (2.126)$$

da cui:

$$\tan \phi_e = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \phi_e = \arctan \frac{1}{4} = \begin{cases} \phi_{e1} \simeq 14^\circ, \\ \phi_{e2} \simeq 194^\circ. \end{cases} \quad (2.127)$$

Per studiare la stabilità o meno di queste configurazioni di equilibrio ci calcoliamo la derivata seconda²⁹ $U''(\phi)$ per $\phi = \phi_{e1}$ e per $\phi = \phi_{e2}$:

$$\begin{aligned} U''(\phi)|_{\phi_{e1(2)}} &= \frac{mgl}{2} (4 \cos \phi_{e1(2)} + \sin \phi_{e1(2)}) = \pm \frac{mgl}{2} \frac{4 + \tan \phi_e}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi_e}} = \\ &= \pm \frac{\sqrt{17}}{2} mgl \begin{cases} > 0 & (\text{per } \phi_{e1}), \\ < 0 & (\text{per } \phi_{e2}), \end{cases} \end{aligned} \quad (2.128)$$

i segni “+” e “-” corrispondendo agli angoli ϕ_{e1} e ϕ_{e2} , rispettivamente. Questo significa che solo nel primo ($\phi_{e1} \simeq 14^\circ$) si ha un *minimo* dell'energia potenziale, ed è quindi (l'unico) equilibrio “stabile”.

3. Il Momento d'Inerzia del sistema rispetto al polo O è dato dalla somma dei momenti d'inerzia delle due aste rispetto al loro estremo comune (lo stesso polo O); utilizzando la (2.119) troviamo così:

$$\mathcal{I}_O = \frac{1}{3} m l^2 + \frac{1}{3} 2 m (2l)^2 = 3 m l^2. \quad (2.129)$$

4. Poiché il polo O è fisso (*cerniera*), l'energia cinetica è semplicemente data dalla (2.124):

$$E_c = \frac{1}{2} \mathcal{I}_O \dot{\phi}^2 = \frac{3}{2} m l^2 \dot{\phi}^2, \quad (2.130)$$

dove $\dot{\phi}$ è la velocità angolare del sistema.

5. L'energia meccanica è costante, essendo il sistema *conservativo*, ed è data dalla somma dell'energia cinetica (2.130) e di quella potenziale (2.125):

$$E = E_c + U = \frac{3}{2} m l^2 \dot{\phi}^2 - \frac{mgl}{2} (\sin \phi + 4 \cos \phi). \quad (2.131)$$

²⁹Si è fatto uso delle formule trigonometriche: $\cos \phi = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi}}$, e $\sin \phi = \pm \frac{\tan \phi}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi}}$.

Poiché il sistema viene abbandonato dallo stato di quiete ($\dot{\phi}(t=0) = 0$) dalla configurazione con $\phi = \phi_0 = \pi/2$, si trova che l'energia deve sempre restare uguale a:

$$E = E(t=0) = -\frac{mgl}{2}. \quad (2.132)$$

Usando questo risultato nella (2.131) si può quindi determinare come varia la velocità angolare in funzione dell'angolo ϕ :

$$\dot{\phi}(\phi) = \pm \sqrt{\frac{g}{3l} (\sin \phi + 4 \cos \phi - 1)}. \quad (2.133)$$

In particolare, da questa formula possiamo cercare i punti (cioè, gli angoli) di *inversione*, cioè gli angoli per i quali il moto del sistema si inverte (e quindi il sistema è istantaneamente fermo), ponendo $\dot{\phi} = 0$; si arriva così all'equazione:

$$\sin \phi + 4 \cos \phi - 1 = 0, \quad (2.134)$$

le cui soluzioni sono $\phi_1 = \pi/2 \equiv \phi_0$ (l'angolo iniziale, come ci si sarebbe dovuto aspettare!) e $\phi_2 = -\arctan(15/8) \simeq -62^\circ$.

6. Come abbiamo mostrato nel §2.6.3 (eq.(2.89)), l'equazione del moto - almeno per un sistema conservativo - può anche essere ottenuta derivando rispetto al tempo l'energia, che è costante. Nel nostro caso, la derivazione di E data dalla (2.131) dà:

$$0 = \frac{dE}{dt} = 3ml^2 \dot{\phi} \ddot{\phi} - \frac{mgl}{2} \dot{\phi} (\cos \phi - 4 \sin \phi),$$

da cui si ottiene:

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{6l} (4 \sin \phi - \cos \phi) = 0. \quad (2.135)$$

Si tratta evidentemente di un'equazione differenziale non-lineare che non siamo in grado di risolvere. Tuttavia, nel caso di *piccole oscillazioni* attorno alla posizione di equilibrio *stabile* ϕ_{e1} (dato nella (2.127)), possiamo convenientemente "linearizzarla". Considerando infatti angoli che si discostano poco da ϕ_{e1} , possiamo porre $\theta = \phi - \phi_{e1}$, con $|\theta| \ll 1$. Esprimendo allora l'equazione del moto (2.135) nella *nuova* variabile θ si ha (essendo $\ddot{\phi} = \ddot{\theta}$):

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{6l} [4 \sin(\theta + \phi_{e1}) - \cos(\theta + \phi_{e1})] = 0, \quad (2.136)$$

da cui, con qualche semplice passaggio algebrico (e utilizzando il fatto che $\tan \phi_{e1} = 1/4$), si arriva alla:

$$\ddot{\theta} + \frac{\sqrt{17}g}{6l} \sin \theta = 0. \quad (2.137)$$

Infine, poiché nell'ipotesi di piccole oscillazioni $\sin \theta \simeq \theta$, otteniamo un'equazione del moto "armonica" (lineare):

$$\ddot{\theta} + \frac{\sqrt{17}g}{6l} \theta = 0, \quad (2.138)$$

corrispondente ad una *pulsazione*:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\sqrt{17}g}{6l}}, \quad (2.139)$$

e quindi ad un *periodo* pari a:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{6l}{\sqrt{17}g}}. \quad (2.140)$$

2.8.4 Rotolamento puro

Il moto di un corpo è detto di *Puro Rotolamento* (ad un certo istante) se il punto di contatto tra il corpo e la superficie sulla quale si muove è *istantaneamente* fermo, ovvero se non c'è *strisciamento*. Per esempio, la ruota di una bicicletta che ha una velocità (del suo centro di massa G) \mathbf{v}_G , in assenza di strisciamento ruota con una velocità angolare tale da soddisfare il cosiddetto "vincolo di *Puro Rotolamento*", cioè la condizione (derivata direttamente dal vincolo di corpo rigido (2.113)) che impone una velocità nulla per il punto (P) di contatto con la strada:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_G + \omega \wedge \vec{GP} = 0, \quad (2.141)$$

da cui, esplicitando le componenti (rispetto al piano cartesiano con asse x orizzontale ed asse y verso l'alto):

$$0 = v_G \hat{\mathbf{i}} + \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & -R & 0 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{i}}(v_G + \omega R), \quad (2.142)$$

e quindi, in definitiva, la *familiare* condizione (scalare) che lega la velocità angolare alla velocità del centro di massa della ruota nel caso di puro rotolamento:

$$v_G = -\omega R; \quad (2.143)$$

il segno *meno* indica semplicemente che ad un avanzamento della ruota nella direzione positiva delle x implica una rotazione *oraria*.

La caratteristica fondamentale dei sistemi nei quali si ha un moto di puro rotolamento è che essi sono *conservativi*, per cui si ha la conservazione dell'energia meccanica, a dispetto della presenza di una forza di attrito. Il motivo è che questa non compie alcun lavoro, in virtù del fatto che istante per istante il punto in cui è applicata è fermo. Nel prossimo paragrafo vedremo un esempio esplicito di *problema* relativo al “puro rotolamento”.

2.8.5 Esempio: Puro Rotolamento di un cilindro su un piano inclinato

Si consideri un cilindro di massa M e raggio R , abbandonato dallo stato di quiete dal punto più alto (ad un'altezza h) di un piano inclinato (di un angolo α rispetto al piano orizzontale). Tra piano inclinato e cilindro sia presente un attrito sufficiente da garantire un moto di puro rotolamento. Siano G e P , rispettivamente, il centro di massa del cilindro e il punto di contatto che questo ha con il piano inclinato ad un certo istante. Il coefficiente di attrito (statico) sia μ . Gli assi cartesiani siano scelti in modo tale che l'asse x coincida con l'asse inclinato del piano su cui scende il cilindro, e l'asse y , perpendicolare ad esso, sia diretto nella stessa direzione della reazione vincolare del piano inclinato. Le forze agenti sul cilindro sono:

- la forza peso: $M \mathbf{g} = M g (\hat{\mathbf{i}} \sin \alpha - \hat{\mathbf{j}} \cos \alpha)$;
- la reazione vincolare del piano: $\mathbf{N} = N \hat{\mathbf{j}}$;
- la forza di attrito: $\mathbf{F}_a = -\mu N \hat{\mathbf{i}}$.

La prima equazione cardinale (2.56) è quindi:

$$M \mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_a = M \mathbf{a}_G, \quad (2.144)$$

che in componenti si scrive:

$$\begin{cases} M g \sin \alpha - \mu N = M a_G, \\ N - M g \cos \alpha = 0, \end{cases} \quad (2.145)$$

dove si è tenuto conto che il cilindro (ovvero il suo centro di massa G) può solo avere un'accelerazione lungo il piano inclinato (cioè lungo l'asse x). Risolvendo questo semplice sistema si ottiene quindi:

$$a_G = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha). \quad (2.146)$$

Questa accelerazione, essendo costante, indica che il cilindro scende lungo il piano inclinato di moto uniformemente accelerato. Per lo studio degli aspetti *rotazionali* del moto dobbiamo utilizzare la seconda equazione cardinale (2.57), che in questo caso, in assenza di punti *fissi*, va scritta rispetto al centro di massa (*polo*) G :

$$\mathbf{M}_G = \vec{G}\vec{P} \wedge \mathbf{F}_a = -R\hat{\mathbf{j}} \wedge (-\mu M g \cos \alpha)\hat{\mathbf{i}} = -\mu M g R \cos \alpha \hat{\mathbf{k}} = \frac{d\mathbf{L}_G}{dt} = \mathcal{I}_G \dot{\omega}, \quad (2.147)$$

da cui, essendo $\mathcal{I}_G = \frac{1}{2} M R^2$ il momento d'inerzia del cilindro rispetto al suo centro, si ottiene per l'accelerazione angolare la seguente espressione:

$$\dot{\omega} = -\frac{2\mu g \cos \alpha}{R} \hat{\mathbf{k}}; \quad (2.148)$$

il segno *meno*, di nuovo, ci informa che il cilindro durante la discesa acquista una velocità angolare negativa³⁰, corrispondente ad un moto rotatorio *orario*. Come si è visto, la condizione di *puro rotolamento* (2.141) mette in relazione, ad ogni istante, la velocità angolare del cilindro con la velocità del suo centro di massa G , eq.(2.143): $v_G = -\omega R$; derivando questa rispetto al tempo troviamo la relazione tra le rispettive accelerazioni:

$$a_G = -\dot{\omega} R, \quad (2.149)$$

che utilizzata nelle eq.(2.146) e (2.148) (quest'ultima considerata scalarmente) ci permette di determinare il *minimo* valore del coefficiente di attrito μ necessario per avere il moto di puro rotolamento del cilindro:

$$g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = 2\mu g \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{3} \tan \alpha. \quad (2.150)$$

Sostituendo infine questo risultato nella (2.146) si ottengono le accelerazioni (costanti) che caratterizzano il moto:

$$\begin{cases} a_G = \frac{2}{3} g \sin \alpha, \\ \dot{\omega} = -\frac{2g}{3R} \sin \alpha. \end{cases} \quad (2.151)$$

Per ottenere invece la velocità del centro di massa v_G e quella angolare ω raggiunte dal cilindro quando arriva al punto più basso del piano inclinato, conviene utilizzare il principio di conservazione dell'energia, visto che, come abbiamo già avuto modo di sottolineare, nel caso di puro rotolamento il sistema è conservativo. L'energia meccanica iniziale è sotto forma di energia potenziale (gravitazionale):

$$E_i = U_i = M g h, \quad (2.152)$$

mentre quella finale, esclusivamente cinetica, può essere scritta, sfruttando il teorema di König (2.123), come somma di quella traslazionale del centro di massa e di quella rotazionale attorno ad esso:

³⁰Cioè un *vettore velocità angolare* diretto verso $-\hat{\mathbf{k}}$.

$$\begin{aligned}
E_f &= \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \mathcal{I}_G \omega^2 = \\
&= \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \frac{M R^2}{2} \frac{v_G^2}{R^2} = \frac{3}{4} M v_G^2.
\end{aligned} \tag{2.153}$$

La condizione $E_i = E_f$ ci permette quindi di ottenere:

$$v_G = \sqrt{\frac{4}{3} g h}, \quad \omega = -\frac{2}{R} \sqrt{\frac{g h}{3}}. \tag{2.154}$$

2.8.6 Esercizio

Un ragazzo che sta giocando a *bowling* lancia la sua palla (di massa M e raggio R) tangenzialmente alla pista con una velocità iniziale v_0 , senza imprimergli alcuna rotazione. Sia μ il coefficiente di attrito tra la pista e la palla. Determinare dopo quanto tempo la palla cessa di strisciare, iniziando il moto di rotolamento puro, e calcolare quindi sia la velocità del suo centro di massa che quella angolare da tale istante.

Svolgimento:

Si prenda l'asse x lungo la pista (orizzontale) e l'asse y verticale verso l'alto. Nello stato iniziale (cioè, appena lanciata) la palla è caratterizzata da una velocità del suo centro di massa G uguale a $\mathbf{v}_G(0) = v_0 \hat{\mathbf{i}}$ e da una velocità angolare nulla, $\omega(0) = 0$. Su di essa agisce la forza peso, $M \mathbf{g} = -M g \hat{\mathbf{j}}$, la reazione vincolare della pista, $\mathbf{N} = N \hat{\mathbf{j}}$, e la forza di attrito, $\mathbf{F}_a = -\mu N \hat{\mathbf{i}}$; la prima applicata in G , le altre due nel punto P di contatto con la pista. Le equazioni cardinali (2.56) e (2.57) per la palla portano al seguente sistema:

$$\begin{cases} -\mu N = M a_G, \\ N - M g = 0, \\ \mathbf{M}_G = \vec{G}P \wedge \mathbf{F}_a = -R \hat{\mathbf{j}} \wedge (-\mu N \hat{\mathbf{i}}) = -\mu N R \hat{\mathbf{k}} = \frac{d\mathbf{L}_G}{dt} = \mathcal{I}_G \dot{\omega} = \frac{2}{5} M R^2 \dot{\omega} \hat{\mathbf{k}}, \end{cases} \tag{2.155}$$

dove si è usato il fatto che il momento d'inerzia di una sfera omogenea di massa M e raggio R rispetto al suo centro³¹ è $\mathcal{I}_G = \frac{2}{5} M R^2$. La risoluzione di questo sistema dà i seguenti risultati:

$$\mathbf{a}_G = -\mu g \hat{\mathbf{i}}, \quad \dot{\omega} = -\frac{5 \mu g}{2 R} \hat{\mathbf{k}}, \tag{2.156}$$

dalla cui integrazione otteniamo le velocità (del centro di massa e angolare) in funzione del tempo t :

³¹Ovvero, rispetto ad un qualsiasi asse passante per G .

$$\int_{\mathbf{v}_0}^{\mathbf{v}_G(t)} d\mathbf{v} = -\mu g \hat{\mathbf{i}} \int_0^t dt' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_G(t) = (v_0 - \mu g t) \hat{\mathbf{i}},$$

$$\int_0^{\omega(t)} d\omega = -\hat{\mathbf{k}} \frac{5\mu g}{2R} \int_0^t dt' \quad \Rightarrow \quad \omega(t) = -\frac{5\mu g}{2R} t \hat{\mathbf{k}}.$$
(2.157)

La velocità del punto P della palla a contatto con la pista si ottiene utilizzando l'equazione del *vincolo di corpo rigido*, eq.(2.113):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_P(t) &= \mathbf{v}_G(t) + \omega(t) \wedge \vec{GP} = \\ &= (v_0 - \mu g t) \hat{\mathbf{i}} + \left(-\frac{5\mu g}{2R} t \hat{\mathbf{k}} \right) \wedge (-R \hat{\mathbf{j}}) = \\ &= \left(v_0 - \mu g t - \frac{5\mu g t}{2} \right) \hat{\mathbf{i}} = \left(v_0 - \frac{7}{2} \mu g t \right) \hat{\mathbf{i}}. \end{aligned}$$
(2.158)

Da questa si evince che la velocità di P si annulla ad un tempo \tilde{t} dato da:

$$\tilde{t} = \frac{2v_0}{7\mu g}.$$
(2.159)

Da questo istante in poi la palla inizia a rotolare senza più strisciare, e poiché la forza di attrito non compie più alcun lavoro, le velocità restano invariate:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_G(t) &= (v_0 - \mu g \tilde{t}) \hat{\mathbf{i}} = \frac{5}{7} v_0 \hat{\mathbf{i}}, \quad (\text{per } t > \tilde{t}) \\ \omega(t) &= -\frac{5\mu g \tilde{t}}{2R} \hat{\mathbf{k}} = -\frac{5v_0}{7R} \hat{\mathbf{k}}, \quad (\text{per } t > \tilde{t}). \end{aligned}$$
(2.160)

2.9 Forze centrali, Gravitazione e Leggi di Keplero

Vogliamo qui studiare le caratteristiche generali del moto di un punto materiale P soggetto a “Forze Centrali”, dirette cioè radialmente in un certo sistema di coordinate cartesiane, di origine O . Si assume inoltre che la sua intensità dipenda solo dalla distanza r di P da O ($r \equiv |\vec{OP}|$):

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r) \hat{\mathbf{r}},$$
(2.161)

dove $\hat{\mathbf{r}}$ è il versore *radiale*. Chiaramente ciò equivale a dire che i campi di forze che stiamo considerando hanno simmetria sferica, ovvero che sono *isotropi*. Pertanto il sistema di coordinate più appropriato per studiare questi problemi è quello delle *coordinate sferiche* r, θ, ϕ , che definiremo nella (5.14) del §5.2. Già da queste caratteristiche generali possiamo trarre alcune importanti conclusioni:

- La forza \mathbf{F} è *conservativa*; infatti, essendo diretta radialmente ed avendo un'intensità che può essere solo funzione di r (e non anche delle variabili angolari θ e ϕ), risulta identicamente nullo il suo *rotore* (in cui sono presenti solo le derivate miste $\frac{\partial F_r}{\partial \theta}$ e $\frac{\partial F_r}{\partial \phi}$, qui entrambe nulle). Conseguenza fondamentale della conservatività di \mathbf{F} è la conservazione dell'energia (meccanica) durante il moto:

$$E = E_c + U = \frac{1}{2} m v^2 + U(r) = \text{costante}, \quad (2.162)$$

dove l'*energia potenziale* $U(r)$ è ottenibile dall'eq.(2.71).

- Anche il Momento Angolare è conservato; infatti, dalla *radialità* (o *centralità*) della forza segue che è nullo il suo momento rispetto ad O :

$$\mathbf{M}_O = \vec{OP} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{r} \wedge \hat{\mathbf{r}} F(r) = 0, \quad (2.163)$$

e quindi, in virtù della seconda equazione cardinale, eq.(2.59), ne consegue che il momento angolare resta costante:

$$\mathbf{L}_O = \vec{OP} \wedge \mathbf{Q} = \mathbf{r} \wedge m \mathbf{v} = \text{costante}. \quad (2.164)$$

Questo significa però che durante il moto il *raggio vettore* \mathbf{r} e la velocità \mathbf{v} devono sempre restare su uno stesso piano, ovvero che le traiettorie stesse del punto materiale soggetto a questo campo di forze devono essere *piane*. Questo ci autorizza ad utilizzare le semplici coordinate *polari piane* (r, ϕ) nel piano $z = 0$ (corrispondente alla scelta $\theta = \pi/2$, delle coordinate sferiche). Usando pertanto la formula (2.7) per la velocità (ma con la sostituzione di θ con ϕ) si ottiene per il momento angolare (costante) la seguente espressione:

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \wedge m (\dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\phi} \hat{\phi}) = m r^2 \dot{\phi} \hat{\mathbf{k}} \equiv L_O \hat{\mathbf{k}} = \text{costante}, \quad (2.165)$$

(essendo $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{r}} \wedge \hat{\phi}$). Importante *corollario* è la ben nota legge che, nel caso particolare della Forza di Gravitazione Universale di Newton, è detta "Legge delle Aree", o anche "Seconda Legge di Keplero"; cerchiamo infatti di calcolare la *velocità* con cui varia l'area *spazzata* dal raggio vettore \mathbf{r} durante il moto. In un tempo infinitesimo dt , in cui l'angolo polare ϕ varia di $d\phi$ ed il punto materiale percorre un tratto di traiettoria $dl = r d\phi$, l'incremento dell'area attraversata è essenzialmente quella di un triangolo isoscele di lato r e base dl , ovvero: $dA = \frac{1}{2} r^2 d\phi$, per cui la sua variazione nell'unità di tempo, detta "velocità areolare" risulta data da:

$$\dot{A} \equiv \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi} = \frac{L_O}{2m}, \quad (2.166)$$

ed è quindi costante in virtù della (2.165): *il punto materiale percorre quindi la sua traiettoria attraversando aree uguali in tempi uguali*. Naturalmente questo significa che quanto stabilisce la Seconda Legge di Keplero, vale in generale per qualsiasi forza di tipo centrale, e non solo per la Gravitazione Universale.

Vediamo adesso come è possibile classificare qualitativamente il tipo di traiettorie possibili per un generico campo di forze centrali, caratterizzato da un'energia potenziale $U(r)$. Dalla conservazione dell'energia (2.162), usando ancora la formula (2.7), e tenendo conto che anche il momento angolare è costante (eq.(2.165)), troviamo:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + U(r) = \\ &= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \left[\frac{L_O^2}{2m r^2} + U(r) \right] \equiv \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{eff}(r), \end{aligned} \quad (2.167)$$

dove si è definita l'*Energia Potenziale efficace* $U_{eff}(r)$, il cui primo termine, detto "Energia Potenziale Centrifuga", corrisponde ad una *barriera* di potenziale, cioè ad una forza repulsiva che, se presente, impedisce al punto materiale di *cadere* nel centro O .

L'eq.(2.167) ha la forma dell'energia del *moto unidimensionale* (nella coordinata r) di un punto materiale soggetto ad un campo di energia potenziale U_{eff} . Poiché le zone *permesse* sono solo quelle per le quali $E \geq U_{eff}$, lo studio di quest'ultima (come funzione della distanza r da O) permette di stabilire l'intervallo di variabilità di r al variare dell'energia (costante) E , e quindi, in definitiva, di intuire qualitativamente il tipo di traiettoria del punto materiale nel piano.

Applichiamo quanto detto al caso specifico della Gravitazione Univerale di Newton, per la quale l'energia potenziale è data dalla (2.77), con lo scopo di dedurre, qualitativamente, il tipo di traiettorie che possono avere, per esempio, i corpi celesti (di massa m) nel campo di gravità di un corpo massiccio (di massa $M \gg m$) posto nel centro O delle coordinate. In questo caso l'energia potenziale *efficace* è data dalla seguente formula:

$$U_{eff}(r) = \frac{L_O^2}{2m r^2} - \frac{G M m}{r}. \quad (2.168)$$

Lo studio di questa *funzione* ci mostra che:

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0} U_{eff}(r) = +\infty, & \lim_{r \rightarrow \infty} U_{eff}(r) = 0, \\ U_{eff}(r) < 0 & \text{per } r > \frac{L_O^2}{2GMm^2} \equiv \frac{r_*}{2}; \end{cases} \quad (2.169)$$

inoltre è facile verificare che $U_{eff}(r)$ presenta un minimo assoluto in

$$r = r_* = \frac{L_O^2}{GMm^2}, \quad (2.170)$$

pari a

$$U_{min} \equiv U_{eff}(r_*) = -\frac{G^2 M^2 m^3}{2 L_O^2}, \quad (< 0). \quad (2.171)$$

Ciò è sufficiente per poter concludere che avremo traiettorie *aperte* e *illimitate* per ogni valore dell'energia $E \geq 0$; in particolare, avremo orbite *iperboliche* per $E > 0$ ed orbite *paraboliche* se l'energia è zero. Il punto di minima distanza dall'oggetto centrale M (unico *punto di inversione* nel caso $E > 0$) si può ottenere trovando l'unica soluzione accettabile (positiva) dell'equazione $E = U_{eff}(r)$, e risulta essere dato da:

$$r_{min} = \sqrt{\left(\frac{G M m}{2 E}\right)^2 + \frac{L_O^2}{2 m E}} - \frac{G M m}{2 E}, \quad (\text{per } E > 0). \quad (2.172)$$

Nel caso dell'orbita parabolica (per $E = 0$), la minima distanza è invece data da:

$$r_{min} = \frac{L_O^2}{2 m^2 M G} \equiv \frac{r_*}{2}, \quad (\text{per } E = 0). \quad (2.173)$$

Per energie negative ma maggiori del minimo di U_{eff} dato in (2.171), si hanno due punti di inversioni e quindi orbite *limitate*, che in particolare risultano essere *ellittiche*; le distanze minima e massima da O sono date dalla seguente formula:

$$r_{max(min)} = \frac{G M m}{2 |E|} \pm \sqrt{\left(\frac{G M m}{2 |E|}\right)^2 - \frac{L_O^2}{2 m |E|}}, \quad (\text{per } 0 > E > U_{min}). \quad (2.174)$$

Infine, nel caso in cui l'energia del sistema sia proprio uguale al minimo di U_{eff} dato in (2.171), si ha un unico valore possibile della distanza r , corrispondente perciò ad orbite *circolari* di raggio $r = r_*$ dato dalla (2.170).

A conclusione di questo paragrafo vogliamo sottolineare che questa stessa tecnica può essere utilizzata per studiare i moti corrispondenti a qualsiasi altra forma di forze centrali.

2.9.1 Ulteriori Considerazioni sulla Gravità Terrestre

Ci sono alcuni aspetti della Gravità Terrestre che meritano qualche approfondimento. Per prima cosa vogliamo mostrare come la *classica* espressione dell'energia potenziale utilizzata vicino alla superficie terrestre, data in eq.(2.75), possa essere vista come una prima approssimazione della formula *esatta* (2.77), applicabile per quote h molto minori del raggio della Terra R . In effetti, sviluppando quest'ultima in serie (di potenze di h/R ($\ll 1$))³² si ottiene:

³²similmente a quanto si è fatto nello studio della caduta dei gravi presentato nei §§2.2.1 e 2.2.2.

$$\begin{aligned}
U(r = R + h) &= -\frac{GMm}{R+h} = -\frac{GMm}{R} \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-1} \simeq -\frac{GMm}{R} \left(1 - \frac{h}{R}\right) = \\
&\simeq -\frac{GMm}{R} + \frac{GMm}{R^2} h \equiv (\text{costante}) + mgh,
\end{aligned} \tag{2.175}$$

dove si è di nuovo fatto uso dello sviluppo³³: $(1 \pm x)^\alpha \simeq 1 \pm \alpha x + \mathcal{O}(x^2)$, per $|x| \ll 1$, e dove si è definita l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre: $g = GM/R^2 \simeq 9.81 \text{ m/s}^2$. La (2.175) ci conferma che, a meno di una costante additiva, l'espressione $U = mgh$ si possa considerare una forma approssimata della formula corretta (2.77).

Altra considerazione va fatta sulla gravità all'interno della Terra stessa. La legge della Gravitazione Universale di Newton data in (2.76) non è chiaramente applicabile per $r < R$, anche perché darebbe un risultato privo di senso avvicinandosi al centro ($F_G \rightarrow \infty$ per $r \rightarrow 0$). È anzi logico aspettarsi che la gravità si annulli esattamente per $r = 0$. Per determinare il corretto comportamento della forza di gravità internamente alla Terra possiamo utilizzare il *Teorema di Gauss*³⁴, in conseguenza del quale la forza di gravità agente su una particella di massa m , che si trova ad una distanza r dal centro (della Terra), è dovuta soltanto alla massa contenuta all'interno della sfera avente per raggio la stessa distanza. Assumendo per semplicità una densità costante, pari a $\rho = M/(4\pi R^3/3)$, ciò ci permette di scrivere:

$$\begin{aligned}
F_G(r) &= -\frac{Gm}{r^2} M_{int}(r) = -\frac{Gm}{r^2} \rho \left(\frac{4}{3} \pi r^3\right) = \\
&= -\frac{GMm}{R^3} r \equiv -Kr, \quad (\text{per } r < R),
\end{aligned} \tag{2.176}$$

una forza del tutto simile a quella elastica data dalla legge di Hooke. Questo significa che se fosse possibile praticare un tunnel dal polo Nord al polo Sud passante per il centro della Terra, un oggetto lasciato cadere al suo interno sarebbe caratterizzato da un *moto armonico* di pulsazione:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

ed un periodo $T = 2\pi \sqrt{R/g} \simeq 5000 \text{ s} \simeq 1 \text{ h } 24'$.

Dall'eq.(2.176) possiamo anche calcolare l'energia potenziale per $r < R$, estendendo così il risultato dato nella (2.77):

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \tag{2.177}$$

(valido per ogni $r \geq R$), dal quale si evince che sulla superficie ($r = R$) possiamo porre:

³³Vedi Nota 10.

³⁴Solitamente applicato nel contesto dell'elettrostatica; si veda quanto esposto nel §5.5.

$$U(R) = -\frac{GMm}{R}. \quad (2.178)$$

Sfruttando quindi il fatto che l'energia potenziale deve essere una funzione *continua*, integrando la (2.176) si ottiene:

$$U(r) - U(R) = -\int_R^r \mathbf{F}_G \cdot d\mathbf{r} = \int_R^r \frac{GMm}{R^3} r dr = \frac{GMm}{2R^3} (r^2 - R^2), \quad (2.179)$$

da cui, tenendo conto della (2.178), si arriva in definitiva al seguente risultato:

$$U(r) = -\frac{GMm}{R} + \frac{GMm}{2R^3} (r^2 - R^2) = -\frac{GMm}{2R^3} (3R^2 - r^2), \quad (\text{per } r < R). \quad (2.180)$$

La rappresentazione grafica di questa espressione è una *parabola* (con vertice in $r = 0$) che si unisce con continuità (per $r = R$) con l'*iperbole equilatera* che rappresenta la (2.77) (o la (2.177)).

2.9.2 La Terza Legge di Keplero (per orbite circolari)

Dopo aver visto come la *Seconda Legge di Keplero* sia una diretta conseguenza della legge di conservazione del Momento Angolare, per completezza tratteremo anche della *Terza Legge*, limitandoci per semplicità alle sole orbite circolari. Come si è visto nel §2.9, le orbite circolari (di raggio r_* dato in (2.170)) corrispondono al minimo valore possibile per l'energia del sistema (eq.(2.171)). Questo risultato si sarebbe potuto ottenere anche più facilmente, osservando che un'orbita circolare può essere interpretata come l'effetto di un equilibrio tra la forza gravitazionale F_G e quella *centrifuga* F_{cf} . Utilizzando l'eq.(2.6) si può quindi scrivere la seguente condizione:

$$F_G = \frac{GMm}{r_*^2} = F_{cf} = m\omega^2 r_* = \frac{4\pi^2 m r_*}{T^2}, \quad (2.181)$$

dove T è il *Periodo di Rivoluzione* del pianeta attorno al Sole. Da questa uguaglianza si arriva direttamente alla forma classica con cui viene presentata la "Terza Legge di Keplero", valida nell'ipotesi³⁵ in cui l'oggetto centrale abbia una massa (M) molto maggiore di quella del pianeta (m):

$$\frac{r_*^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \quad (= \text{costante}), \quad (2.182)$$

secondo la quale "il rapporto tra il cubo della distanza di ciascun pianeta³⁶ dal Sole e il quadrato del suo periodo di rivoluzione è costante" (cioè indipendente dal pianeta).

³⁵Nel §2.9.5 vedremo come questa legge si generalizza (eq.(2.195)) al caso in cui le masse m ed M siano comparabili tra loro.

³⁶Nel caso più generale di un'orbita ellittica, invece del raggio r_* , nell'enunciato della Terza Legge di Keplero dovremmo utilizzare il *semiasse maggiore*.

Ricordiamo che la *Prima Legge di Keplero* attesta semplicemente che i pianeti percorrono orbite ellittiche intorno al Sole, posto in uno dei suoi due fuochi.

2.9.3 Velocità di Fuga da un pianeta

Tutti danno per certo che lanciato un oggetto verso l'alto prima o poi ricadrà a terra, ed è pur chiaro aspettarsi che quanto maggiore è la velocità iniziale, tanto maggiore sarà l'altezza massima raggiunta prima di invertire il moto verso terra. Ed ecco allora che sorge la domanda: quant'è la minima velocità iniziale (verso l'alto) che è necessario imprimere ad un corpo affinché questo, invece di ricadere a terra, possa allontanarsene indefinitamente? Tale velocità (v_f) è detta "di fuga". Per la sua determinazione è sufficiente applicare ancora una volta la Legge di Conservazione dell'Energia Meccanica. Inizialmente, cioè subito dopo il lancio, l'oggetto oltre all'energia cinetica ha anche un'energia potenziale data dalla (2.178), e poiché a grandi distanze ($r \gg R$) si ha $U(r) \rightarrow 0$, da tale conservazione si ottiene:

$$E_i = E_{c(i)} + U_i = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{G M m}{R} = E_\infty \equiv E_{c(\infty)} \geq 0, \quad (2.183)$$

da cui, in definitiva, si deduce che la *velocità di fuga* è data dalla formula:

$$v \geq v_f = \sqrt{\frac{2 G M}{R}}. \quad (2.184)$$

Per la Terra, per esempio, si trova che $v_f \simeq 11 \text{ km/s}$.

2.9.4 Problema dei Due Corpi e Massa Ridotta

Consideriamo il problema generale del moto di due particelle, di masse m_1 e m_2 , in interazione tra loro. La posizione nello spazio del sistema sia descritta dai rispettivi *raggi vettore* \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 , mentre la forza tra di esse sia $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Se prendiamo in considerazione l'intero sistema, non essendoci forze esterne, si ha la conservazione della quantità di moto, che implica un moto rettilineo uniforme del centro di massa:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}} &= m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = (m_1 + m_2) \ddot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{F}_{ext} = 0 & \Rightarrow \\ \mathbf{Q} &= m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_G = \text{costante} & \Rightarrow \\ \mathbf{r}_G(t) &= \frac{m_1 \mathbf{r}_1(t) + m_2 \mathbf{r}_2(t)}{m_1 + m_2} = \mathbf{r}_G(0) + \mathbf{v}_G t. \end{aligned} \quad (2.185)$$

D'altra parte, le equazioni del moto delle due particelle, prese separatamente, sono le seguenti:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \end{cases} \quad (2.186)$$

Si tratta di un sistema di due equazioni differenziali *accoppiate*. Per la sua risoluzione conviene effettuare un cambio di variabili, dalla coppia $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ alla coppia:

$$\mathbf{r}_G = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \quad (2.187)$$

Dell'equazione del moto per il raggio vettore del centro di massa si è già trovata la soluzione (2.185) sfruttando la conservazione della quantità di moto. Per la variabile “distanza relativa” \mathbf{r} , l'equazione del moto può essere ottenuta dividendo la prima delle eq.(2.186) per m_1 e la seconda per m_2 e prendendone la differenza, ottenendo così:

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 \equiv \ddot{\mathbf{r}} = - \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (2.188)$$

Poiché la forza tra le due particelle dipende sempre solo dalla loro distanza $r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$, la (2.188) risulta essere un'equazione differenziale *ordinaria* nella variabile r , che si può scrivere:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}(r), \quad (2.189)$$

dove si è definito:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}; \quad (2.190)$$

μ è detta “massa ridotta” del sistema. L'eq.(2.189) può essere interpretata come l'equazione del moto di un corpo *fittizio* di massa μ , soggetto alla stessa forza esistente tra le due particelle, la cui posizione nello spazio rappresenta proprio il *vettore della distanza relativa* $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Dalla soluzione esplicita di questa equazione, $\mathbf{r}(t)$, e dalla (2.185), possiamo infine risalire ai raggi vettore delle due particelle:

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_G(t) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}(t), \quad \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_G(t) - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}(t). \quad (2.191)$$

2.9.5 Esempio: Sistema di Stelle Doppie

Come esempio di quanto detto nel paragrafo precedente, consideriamo due stelle di masse m e M , distanti d , in rotazione attorno al comune centro di massa, preso come origine di un sistema di riferimento (*non-inerziale*) solidale con l'asse congiungente le due stelle. In tale sistema, le due stelle sono in quiete e la loro posizione è descritta dalle due coordinate $x'_m > 0$ e $x'_M < 0$, tali che:

$$M x'_M + m x'_m \equiv (M + m) x'_G = 0,$$

ovvero $x'_M = -\frac{m}{M} x'_m$, e quindi, essendo $x'_m - x'_M = d$:

$$x'_m = \frac{d}{1 + \frac{m}{M}}, \quad x'_M = -\frac{d}{1 + \frac{M}{m}}. \quad (2.192)$$

Per entrambe le stelle si ha equilibrio (in questo sistema di riferimento solidale col comune centro di massa e rotante con esse) tra la forza gravitazionale e la forza centrifuga, equilibrio che si traduce nelle seguenti condizioni:

$$F_G = \frac{G M m}{d^2} = F_{cf}(M) = -M \omega^2 x'_M = F_{cf}(m) = m \omega^2 x'_m. \quad (2.193)$$

Esprimendo con le (2.192) le coordinate delle due stelle in termini della loro distanza d , si ottiene così il seguente risultato:

$$\frac{G M m}{d^2} = m \omega^2 \frac{d}{1 + \frac{m}{M}} = \frac{m M}{m + M} \omega^2 d \equiv \mu \omega^2 d, \quad (2.194)$$

che, oltre a confermare quanto detto nel paragrafo precedente a proposito del significato della *massa ridotta* μ , fornisce un'utile *correzione* alla Terza Legge di Keplero data nella (2.182), per il caso generale in cui una delle due masse non sia molto maggiore dell'altra³⁷:

$$\frac{d^3}{T^2} = \frac{G (M + m)}{4 \pi^2}. \quad (2.195)$$

L'applicazione di questo risultato al sistema solare ci fa capire che in realtà il rapporto tra i cubi delle distanze dal Sole ed il quadrato dei periodi di rivoluzione, dipendendo da m , non è più lo stesso per tutti i pianeti, come invece previsto dalla versione *semplificata* della Terza Legge di Keplero data nella (2.182).

2.10 Appendice: Schema (Generale) di Risoluzione di un Problema di Meccanica

Anche se è indubbiamente vero che ogni problema va esaminato a sé, tuttavia, in molti casi può essere utile attenersi al seguente *Schema*:

1. Individuazione delle diverse *Fasi Temporal*i nelle quali può essere suddiviso il problema (*e.g.*, fase statica, fase impulsiva, fase dinamica-standard, etc.);
2. Per ciascuna Fase Temporale, suddivisione del Sistema in *Sottosistemi* (*i.e.*, le varie parti del Sistema di cui ci interessa studiare il moto e per le quali si devono trovare e risolvere le equazioni del moto);
3. Scelta del/dei *Sistemi di Riferimento*, precisandone la natura *Inerziale* o *Non-Inerziale*;

³⁷Si ricorda che l'eq.(2.182) è verificata abbastanza bene per i pianeti del sistema solare in virtù del fatto che essi hanno tutti masse molto minori di quella del Sole, il quale perciò può ritenersi fermo (nell'origine delle coordinate, coincidente col centro di massa Sole-Pianeta), con i pianeti che gli ruotano attorno.

4. Per ciascuna Fase Temporale, individuazione delle Forze (o degli Impulsi, se in *Fase Impulsiva*) agenti su ciascun Sottosistema;
5. Determinazione delle *Equazioni Cardinali* per ciascun Sottosistema, per ognuna delle Fasi Temporali;
6. Scomposizione delle equazioni cardinali rispetto al/ai Sistemi di Riferimento scelti precedentemente;
7. Eventuali *Vincoli Cinematici* (cioè le relazioni esistenti tra le variabili cinematiche che descrivono la configurazione spaziale del Sistema);
8. Eventuali *Leggi di Conservazione* (e.g., dell'Energia per sistemi conservativi o della Quantità di Moto per sistemi isolati, etc.).

Capitolo 3

Termologia

3.1 Introduzione. Temperatura e Calore

I concetti di temperatura e calore sono piuttosto familiari. Ne abbiamo esperienza ogni giorno. In qualche modo li associamo alla sensazione di *caldo* e *freddo*. Ma spesso vengono anche confusi tra loro. Vediamo di chiarirne il significato, partendo dall'affermazione che il calore è un'energia, ma un'energia che non è assegnabile ad un corpo o ad un sistema, come lo sono invece altre forme di energia, come quella meccanica (sotto forma di energia cinetica o potenziale); il calore è piuttosto una *variazione* di energia, è cioè l'energia "scambiata" tra due corpi aventi una diversa temperatura. Possiamo allora dire che si osserva un certo passaggio di energia, sotto forma di calore, da un corpo A ad un corpo B , se la temperatura del primo è maggiore di quella che caratterizza il secondo. In tal senso, possiamo definire la temperatura di un corpo come quella grandezza fisica che ne descrive lo *Stato Termico*, indicandoci, per esempio, se e in che direzione viene trasferita dell'energia da tale corpo quando questo viene messo a contatto con un altro. L'esperienza ci insegna che i corpi più caldi cedono calore a quelli più freddi:

$$T_A > T_B \quad \Rightarrow \quad Q(A \rightarrow B), \quad (3.1)$$

e che se non assistiamo ad alcun trasferimento di energia (calore) significa che i due corpi messi a contatto hanno la stessa temperatura. In tal caso diciamo che i due corpi sono "*in equilibrio termico*" tra loro. Ne segue anche il cosiddetto "Principio Zero della Termodinamica": *Se un corpo A è in equilibrio termico con un corpo B , e se questo è in equilibrio termico con un terzo corpo C , allora anche A sarà in equilibrio con C* (una sorta di proprietà transitiva). Se si è capito che il calore non è che una forma di energia trasmessa da un corpo ad un altro, resta da chiarire il significato della grandezza che descrive lo stato termico, la *temperatura*. Come è noto dai corsi elementari di Fisica, questa è una grandezza *fondamentale*, la cui unità di misura nel S.I. è il Kelvin (K). Nella vita di tutti i giorni, tuttavia, siamo abituati ad usare una diversa unità di misura, il

“grado Celsius” (o “centigrado”): $^{\circ}C$. Questo è stato definito come la centesima parte della differenza tra la temperatura di vaporizzazione dell’acqua (per convenzione definita $100^{\circ}C$) e quella di fusione del ghiaccio (definita quindi $0^{\circ}C$), alla pressione atmosferica¹. Ma cosa rappresenta, davvero, la temperatura di un corpo? Qual’è il suo significato *microscopico*? La Teoria Cinetica, come vedremo nel §4.1.1, ci fornisce questa informazione: “La temperatura di un corpo quantifica l’energia cinetica media che caratterizza l’agitazione termica delle particelle (atomi o molecole) che costituiscono il corpo stesso”. Questo implica che esisterà un limite inferiore delle temperature, corrispondente all’assenza di movimento²; tale temperatura, alla quale ci possiamo solo avvicinare, è detta “Zero Assoluto”, a cui viene assegnato il valore di $0 K$ (zero Kelvin), e risulta essere uguale a circa $-273.15^{\circ}C$. Da ciò ne consegue la relazione attraverso la quale è possibile passare dai $^{\circ}C$ ai K :

$$T(K) = T(^{\circ}C) + 273.15,$$

per cui, per esempio, ad una temperatura di $20^{\circ}C$ corrispondono $293.15 K$, e così via.

3.2 Le Leggi Fondamentali della Termologia

Le leggi fondamentali della termologia sono due. La prima descrive il calore scambiato da un corpo che subisce una variazione di temperatura ΔT (in questo caso parliamo di “calore *vivo*”), ed è dato dalla seguente formula:

$$Q = C \Delta T, \tag{3.2}$$

dove C è una *costante* detta “capacità termica” del corpo. Nel caso in cui il corpo in questione sia omogeneo e fatto da un unico materiale, C è proporzionale alla sua massa m :

$$C = c_s m,$$

dove la costante c_s è detto “calore specifico” del materiale in questione³; per esempio, il calore specifico dell’acqua risulta essere $c_{s(H_2O)} \simeq 4186 J/kg K \equiv 1 kcal/kg K$, dove si è definita la “chilocaloria” ($1 kcal \equiv 4186 J$) come la quantità di *energia* necessaria per innalzare di $1^{\circ}C$ (ovvero, di $1 K$) la temperatura di $1 kg$ di acqua⁴. La capacità termica è una grandezza *estensiva*, per cui, se un corpo di massa m è costituito da più materiali, avremo:

¹Più recentemente, tuttavia, si è preferito prendere come riferimento la temperatura che caratterizza il cosiddetto *Punto Triplo* dell’acqua.

²Anche se in effetti la Fisica Quantistica, attraverso il Principio di Indeterminazione di Heisenberg (vedi eq.(6.31)), impedisce che si possa raggiungere esattamente uno stato caratterizzato dalla mancanza di agitazione termica!

³In realtà, c_s non è *esattamente* costante per intervalli di temperatura piuttosto ampi; qui, tuttavia, ignoreremo tali variazioni.

⁴Per l’esattezza, a causa della non assoluta costanza del calore specifico con la temperatura, da 14.5 a $15.5^{\circ}C$.

$$C = \sum_{i=1}^n c_{s(i)} m_i ,$$

essendo $c_{s(i)}$ e m_i il calore specifico e la massa del *componente* i -esimo contenuto nel corpo. In forma *differenziale*, ovvero per una variazione infinitesima dT della temperatura del corpo, l'eq.(3.2) si scrive:

$$\delta Q = C dT . \quad (3.3)$$

La seconda legge della Termologia descrive invece il calore scambiato durante i *Passaggi di Stato*, caratterizzati come ben noto da una temperatura costante. In questo caso, il calore scambiato (assorbito o ceduto), detto “calore latente”, è semplicemente proporzionale alla massa m che ha subito il passaggio di stato:

$$Q = \lambda m ; \quad (3.4)$$

in questa formula λ indica il calore latente *specifico*, cioè il calore necessario per causare tale passaggio di stato in una quantità di massa unitaria di sostanza; per esempio, il calore latente specifico che caratterizza la fusione del ghiaccio (che avviene alla temperatura di $0^\circ C \simeq 273 K$) è $\lambda_{fus} \simeq 83 kcal/kg$.

3.2.1 Equilibrio Termico

Per determinare la temperatura di equilibrio di un sistema ottenuto *mescolando* una certa quantità m_A di una sostanza A (di calore specifico $c_{s(A)}$) inizialmente ad una temperatura T_A , con un'altra sostanza B di massa m_B a temperatura T_B (e calore specifico $c_{s(B)}$), è sufficiente impostare il cosiddetto *bilancio* energetico, uguagliando il calore ceduto dal corpo più caldo al calore assorbito da quello più freddo. Supponendo per esempio che sia $T_A > T_B$, potremmo scrivere:

$$Q_{ced. A} = c_{s(A)} m_A (T_A - T_{eq}) = Q_{ass. B} = c_{s(B)} m_B (T_{eq} - T_B) , \quad (3.5)$$

da cui si ottiene la seguente formula per la temperatura di equilibrio T_{eq} :

$$T_{eq} = \frac{c_{s(A)} m_A T_A + c_{s(B)} m_B T_B}{c_{s(A)} m_A + c_{s(B)} m_B} , \quad (3.6)$$

generalizzabile al caso in cui il sistema sia costituito da più componenti:

$$T_{eq} = \frac{\sum_i c_{s,i} m_i T_i}{\sum_i c_{s,i} m_i} . \quad (3.7)$$

3.2.2 Esempio

Vediamo un semplice esempio concreto. Supponiamo di immergere in un *calorimetro*⁵ di capacità termica $C_{cal} = 0.1 \text{ kcal}/^\circ\text{C}$, contenente inizialmente 200 g di acqua alla temperatura ambiente $T_1 = 20^\circ\text{C}$, un cubetto di ghiaccio di massa $m_{gh} = 50 \text{ g}$ già alla temperatura di fusione di 0°C . Si chiede di determinare la temperatura di equilibrio che si raggiungerà all'interno del calorimetro. Preliminarmente dobbiamo calcolarci la quantità di calore *necessario* per fondere il ghiaccio; dall'eq.(3.4) si trova:

$$Q_{nec} = \lambda_{fus} m_{gh} = 83 \text{ kcal/kg} \cdot 0.05 \text{ kg} = 4.15 \text{ kcal}. \quad (3.8)$$

Il calore “*disponibile*”, cioè la massima quantità di calore cedibile da parte del sistema *acqua + calorimetro*, corrisponde alla massima variazione possibile della sua temperatura, in questo caso di 20°C , ed è quindi data, in accordo con l'eq.(3.2), da:

$$\begin{aligned} Q_{disp} &= (C_{cal} + c_{s(H_2O)} m_{H_2O}) (T_1 - T_{fus}) = \\ &= (0.1 \text{ kcal}/^\circ\text{C} + 1 \text{ kcal/kg}^\circ\text{C} \cdot 0.2 \text{ kg}) (20 - 0)^\circ\text{C} = \\ &= 6 \text{ kcal}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Poiché $Q_{disp} > Q_{nec}$, il ghiaccio riesce a fondere completamente e la temperatura di equilibrio sarà maggiore della temperatura di fusione: $T_{eq} > 0^\circ\text{C}$. Per la sua determinazione dobbiamo impostare il seguente *bilancio energetico*:

$$\begin{aligned} Q_{ced} &= (C_{cal} + c_{s(H_2O)} m_{H_2O}) (T_1 - T_{eq}) = \\ &= Q_{ass} = Q_{nec} + c_{s(H_2O)} m_{gh} (T_{eq} - T_{fus}), \end{aligned} \quad (3.10)$$

ovvero, inserendo i dati numerici:

$$\begin{aligned} (0.1 \text{ kcal}/^\circ\text{C} + 1 \text{ kcal/kg}^\circ\text{C} \cdot 0.2 \text{ kg})(20 - T_{eq})^\circ\text{C} = \\ = 4.15 \text{ kcal} + 1 \text{ kcal/kg}^\circ\text{C} \cdot 0.05 \text{ kg} \cdot T_{eq}; \end{aligned} \quad (3.11)$$

questa è una semplice equazione algebrica di primo grado, la cui soluzione porta al risultato cercato:

$$\begin{aligned} T_{eq} &= \left(\frac{6 - 4.15}{0.30 + 0.05} \right)^\circ\text{C} = \\ &= \left(\frac{1.85}{0.35} \right)^\circ\text{C} \simeq 5.3^\circ\text{C}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

⁵Un calorimetro è essenzialmente un recipiente caratterizzato da una certa capacità termica nota (o comunque determinabile empiricamente) all'interno del quale possono avvenire gli scambi termici desiderati, ma impermeabile al calore con l'ambiente esterno.

3.3 Trasmissione del Calore: Conduzione, Convezione ed Irraggiamento

Nelle leggi della Termologia discusse nel §3.2, si sono tacitamente considerate quantità di calore “*integrali*” scambiate tra corpi, cioè senza considerare i tempi. È tuttavia esperienza comune il fatto che, anche se una porta di legno e la sua maniglia (metallica) hanno la medesima temperatura, per esempio più bassa della nostra temperatura corporea ($\simeq 37^\circ C$), al tatto la maniglia metallica ci *sembra* più fredda della porta. Il motivo sta nel fatto che i materiali metallici *conducono* meglio il calore, nel senso che trasmettono una maggior quantità di energia *nell’unità di tempo* rispetto ad altri materiali, per esempio il legno. In questa sezione considereremo quindi le modalità con cui può venire trasmesso il calore. Queste sono essenzialmente tre:

- *Conduzione*: si parla di calore trasmesso per conduzione quando c’è un contatto tra corpi aventi differenti temperature; il raffreddamento della mano a causa del contatto con una maniglia fredda è di questo tipo.
- *convezione*: in questo caso il calore viene trasmesso attraverso il flusso (movimento) di materia; è di questo tipo, per esempio, il raffreddamento della minestra contenuta in un piatto, ottenuto soffiando (aria) sulla sua superficie, oppure il benessere che ci dà la vicinanza di un ventilatore in estate.
- *irraggiamento*: in questo caso l’energia (il calore) viene trasportata da onde elettromagnetiche, costituite da fotoni che viaggiano alla velocità della luce; il calore raccolto (e poi trasformato in energia utilizzabile) da un pannello solare è di questo tipo.

Vediamo più in dettaglio le leggi che descrivono queste diverse modalità di trasmissione del calore.

3.3.1 Conduzione Termica

La legge che descrive la *conduzione termica* è detta Legge di Fourier. Secondo questa legge, il flusso termico (cioè la quantità di calore trasmesso per unità di tempo) $\dot{Q} \equiv \frac{dQ}{dt}$ scambiato da un elemento di superficie dA e spessore ds di un certo materiale, è dato da:

$$\dot{Q} = K dA \frac{dT}{ds}, \quad (3.13)$$

essendo dT la differenza infinitesima di temperatura agli estremi di tale elemento; la costante di proporzionalità K , detta *costante di conducibilità termica*, dipende dal materiale. Per esempio, una *parete* di superficie A e spessore s , ai cui estremi ci siano le temperature T_1 e T_2 , trasmette nell’unità di tempo una quantità di calore data da:

$$\dot{Q} = K A \frac{|T_1 - T_2|}{s}. \quad (3.14)$$

Questa formula può essere generalizzata al caso in cui la parete sia un *multistrato*, ovvero sia costituita da più materiali, ciascuno caratterizzato da una certa costante di conducibilità termica K_i e da uno spessore s_i ; è relativamente semplice dimostrare che in questo caso si ottiene:

$$\dot{Q} = \frac{A |T_1 - T_2|}{\sum_i \frac{s_i}{K_i}}. \quad (3.15)$$

3.3.2 Esercizio

Le pareti esterne di una casa, fatte solo di cemento (conducibilità termica $K = 2 \cdot 10^{-4} \text{ kcal/m K s}$), hanno una superficie complessiva di 40 m^2 ed uno spessore di 20 cm . Se la temperatura esterna è -5°C e quella interna è di 20°C , si calcoli:

1. la quantità di calore che viene disperso attraverso le pareti verso l'esterno in 24 ore;
2. il volume di olio combustibile che è necessario *bruciare* per compensare questa perdita di calore e poter quindi mantenere la temperatura di 20°C all'interno, sapendo che la densità di tale olio è $\rho_{olio} = 900 \text{ kg/m}^3$ e che la sua combustione produce⁶ $H_{olio} = 12 \cdot 10^3 \text{ kcal}$ per ogni kg .

Svolgimento:

1. Il calore disperso all'esterno per conduzione attraverso le pareti della casa in un tempo $\tau = 24 \text{ h}$ può essere ottenuto applicando la Legge di Fourier in forma finita (eq.(3.14)):

$$\begin{aligned} Q &= K \tau A \frac{T_{int} - T_{ext}}{s} = \\ &= 2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{kcal}}{\text{m}^\circ \text{C s}} (24 \cdot 3600 \text{ s}) 40 \text{ m}^2 \frac{[20 - (-5)]^\circ \text{C}}{0.2 \text{ m}} \simeq \\ &\simeq 86400 \text{ kcal}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

2. La quantità di olio combustibile da bruciare per mantenere costante la temperatura all'interno della casa è pertanto data dal seguente rapporto:

$$m = \frac{Q}{H_{olio}} = \frac{86400 \text{ kcal}}{12 \cdot 10^3 \text{ kcal/kg}} \simeq 7.2 \text{ kg}, \quad (3.17)$$

ed il volume richiesto è quindi:

$$V = \frac{m}{\rho_{olio}} = \frac{7.2 \text{ kg}}{900 \text{ kg/m}^3} \simeq 8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 8 \text{ L}. \quad (3.18)$$

⁶Questa quantità è anche detta "contenuto entalpico del combustibile".

3.3.3 Esercizio (Sulla formazione di uno strato di ghiaccio)

Determinare il tempo necessario alla formazione di uno strato di ghiaccio di spessore $s = 1 \text{ cm}$ in un laghetto se la temperatura dell'acqua è $T_{aq} = 0^\circ\text{C}$, mentre quella dell'aria è scesa *repentinamente* a $T_e = -5^\circ\text{C}$. Sono noti la conducibilità termica del ghiaccio, $K_{gh} = 0.6 \text{ W/m K}$, il calore latente di fusione del ghiaccio (ovvero, di congelamento dell'acqua), $\lambda = 334 \text{ J/g}$, e la densità del ghiaccio, $\rho_{gh} = 1 \text{ g/cm}^3$.

Svolgimento:

Il calore ceduto nell'unità di tempo dall'acqua del laghetto (a $T_{aq} = 0^\circ\text{C}$) e trasmesso all'aria esterna (a $T_e = -5^\circ\text{C}$) per *conduzione* dallo strato di ghiaccio in formazione, di spessore (*variabile*) x , è dato dalla legge di Fourier (3.14):

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{K_{gh} A \Delta T}{x}, \quad (3.19)$$

dove A è la superficie del laghetto (dato irrilevante) e $\Delta T = T_{aq} - T_e$ è la differenza di temperatura agli estremi dello stesso strato di ghiaccio. Questo calore serve per "congelare" una quantità di ghiaccio addizionale pari a $dm_{gh} = \rho_{gh} dV = \rho_{gh} A dx$, ovvero, nell'unità di tempo,

$$\frac{dQ}{dt} = \lambda \frac{dm_{gh}}{dt} = \lambda \rho_{gh} A \frac{dx}{dt}. \quad (3.20)$$

Uguagliando i due "flussi termici" (3.19) e (3.20), si ottiene pertanto la seguente equazione differenziale a variabili separabili:

$$\lambda \rho_{gh} \frac{dx}{dt} = \frac{K_{gh} \Delta T}{x};$$

da questa, integrando, si ha:

$$\int_0^s x dx = \frac{K_{gh} \Delta T}{\lambda \rho_{gh}} \int_0^\tau dt, \quad (3.21)$$

ovvero:

$$\frac{1}{2} s^2 = \frac{K_{gh} \Delta T \tau}{\lambda \rho_{gh}};$$

esplicitando τ , si ottiene quindi, in definitiva, il tempo cercato:

$$\tau = \frac{\lambda \rho_{gh} s^2}{2 K_{gh} \Delta T} \simeq 93 \text{ min} = 1^h 33', \quad (3.22)$$

dove, alla fine, si sono utilizzati i dati numerici forniti nel testo.

3.3.4 Convezione Termica

Si ha convezione termica quando la trasmissione del calore è dovuta agli scambi energetici di un fluido in moto, sia liquido che gassoso. In altre parole, mentre la conduzione presuppone semplicemente un contatto tra vari corpi a temperature diverse tra loro, senza alcuno spostamento della materia, nel caso della convezione il calore viene invece trasportato dalla materia in moto nello spazio. In particolare, si parla di *convezione naturale* quando questo moto è dovuto alla differenza di densità causata da una differenza di temperatura; per esempio, in estate si può creare un moto convettivo dell'aria quando, essendo l'aria calda vicina al suolo più leggera (cioè meno densa), quella più fredda che sta in alto scende per gravità, assorbendo quindi a sua volta calore dal terreno che ne provoca il riscaldamento; la continuità del processo produce i ben noti moti convettivi ascensionali di aria calda e discensionali di aria più fredda. Nel caso invece in cui il moto del fluido è causato da mezzi meccanici, come una pompa di calore o un ventilatore, si parla di *convezione forzata*.

I modelli matematici che descrivono il fenomeno della convezione sono piuttosto complessi, per cui spesso dobbiamo accontentarci di leggi empiriche. Un approccio semplificato può essere il seguente. Consideriamo un fluido (*e.g.*, aria) a contatto con una superficie A (per esempio una parete piana) avente una temperatura diversa da quella che caratterizza la massa di fluido. Anche se il fluido è globalmente in movimento, è plausibile supporre che il sottile strato più vicino alla *parete* sia essenzialmente fermo. Naturalmente lo spessore di questo strato dipende dal tipo di moto del fluido stesso, e sarà tanto più sottile quanto più caotico e turbolento è tale moto. In ogni caso, questo sottile strato di fluido scambierà calore per conduzione con la parete con la quale è a contatto, e per convezione col resto del fluido circostante. Possiamo allora definire un conseguente *coefficiente di convezione* h , determinabile empiricamente, che tiene conto di entrambi i processi, sia della conduzione termica dello strato di fluido con la parete che dei fenomeni convettivi interni al fluido stesso, di modo che si possa esprimere il *flusso termico* (*i.e.*, il calore trasferito per convezione nell'unità di tempo) come:

$$\dot{Q} = h A \Delta T, \quad (3.23)$$

dove ΔT è la differenza di temperatura tra la superficie della parete e la massa del fluido.

Sperimentalmente si osserva che il coefficiente di convezione h dipende da molteplici fattori, come la forma e l'orientamento della parete, la natura del fluido (liquido o gassoso) con cui questa è a contatto, nonché la velocità media che ne caratterizza il movimento nello spazio; per esempio, ci aspettiamo un valore maggiore di h per l'aria esterna (ove è una maggior ventilazione) che per l'aria interna ad una stanza (dove le velocità sono sicuramente ridotte); valori tipici sono in effetti i seguenti: $h(\text{aria interna}) \simeq 8 \text{ W/m}^2 \text{ K}$, e $h(\text{aria esterna}) \simeq 23 \text{ W/m}^2 \text{ K}$.

A questo punto possiamo chiederci se è possibile *correggere* la Legge di Fourier della conduzione attraverso una parete (eq.(3.14) e (3.15)) per tener conto degli

effetti convettivi, sia nell'aria esterna che in quella interna. Consideriamo quindi una parete di area A e spessore s , caratterizzata da una costante (globale) di conducibilità termica K , e siano T_1 e T_2 le temperature delle sue due superfici, interna ed esterna, rispettivamente. Siano quindi T_{int} e T_{ext} le temperature dell'aria interna ed esterna, ove i coefficienti di convezione sono rispettivamente h_{int} e h_{ext} . Senza perdita di generalità possiamo supporre che il calore *fluisca* verso l'esterno, ovvero che sia $T_{int} > T_1 > T_2 > T_{ext}$. In una situazione di equilibrio, per continuità, la quantità di calore trasmessa nell'unità di tempo per convezione dall'aria interna alla superficie interna della parete deve essere uguale sia a quella trasmessa per conduzione dalla superficie interna a quella esterna della parete, che a quella infine trasmessa per convezione dalla superficie esterna della parete all'aria esterna. Utilizzando quindi le eq.(3.14) e (3.23) possiamo scrivere che:

$$\dot{Q} = h_{int} A (T_{int} - T_1) = K A \frac{T_1 - T_2}{s} = h_{ext} A (T_2 - T_{ext}). \quad (3.24)$$

Eliminando da queste equazioni le temperature superficiali della parete (T_1 e T_2) si arriva, attraverso un certo numero di passaggi algebrici, al seguente risultato:

$$\dot{Q} = A \frac{T_{int} - T_{ext}}{\frac{1}{h_{int}} + \frac{s}{K} + \frac{1}{h_{ext}}}, \quad (3.25)$$

ovvero, nella situazione più generale in cui la parete sia costituita da un *multi-strato*:

$$\dot{Q} = A \frac{T_{int} - T_{ext}}{\frac{1}{h_{int}} + \sum_i \frac{s_i}{K_i} + \frac{1}{h_{ext}}}. \quad (3.26)$$

Vediamone un esempio di applicazione:

3.3.5 Esempio

Si vuole determinare il flusso termico specifico (cioè il calore trasmesso nell'unità di tempo per unità di superficie) \tilde{Q} ($= \dot{Q}/A$) uscente dalle pareti esterne di un edificio, costituite da uno strato di muratura in arenaria ($K_m = 1.45 \text{ W/m K}$) dello spessore $s_m = 30 \text{ cm}$, ricoperto su entrambe le facce da uno strato di intonaco ($K_i = 1.2 \text{ W/m K}$) dello spessore $s_i = 2.5 \text{ cm}$. La temperatura dell'aria all'interno dell'edificio sia $T_{int} = 19^\circ \text{C}$, mentre quella all'esterno sia $T_{ext} = 4^\circ \text{C}$. Si assumano infine i seguenti valori per i rispettivi coefficienti di convezione: $h_{int} = 10 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ e $h_{ext} = 20 \text{ W/m}^2 \text{ K}$.

La cosiddetta "trasmittanza" Γ è il reciproco del denominatore nell'eq.(3.26) e nel nostro caso risulta essere:

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \left(\frac{1}{h_{int}} + \frac{2s_i}{K_i} + \frac{s_m}{K_m} + \frac{1}{h_{ext}} \right)^{-1} = \\
&= \left(\frac{1}{10} + \frac{2 \cdot 2.5 \cdot 10^{-2}}{1.2} + \frac{0.3}{1.45} + \frac{1}{20} \right)^{-1} W/m^2 K \simeq \\
&\simeq 2.5 W/m^2 K,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

per cui, in definitiva il flusso specifico cercato è:

$$\tilde{Q} = \Gamma (T_{int} - T_{ext}) \simeq 2.5 \cdot (19 - 4) W/m^2 \simeq 37.6 W/m^2. \tag{3.28}$$

3.3.6 Irraggiamento

La terza modalità con cui può venire trasmesso il calore è per irraggiamento, ed è dovuta all'energia trasportata dalle onde elettromagnetiche. Ogni corpo, a qualsiasi temperatura, emette su tutte le frequenze radiazioni di questo tipo, secondo una tipica distribuzione a campana asimmetrica. Le leggi che descrivono questa *radiazione termica* furono ottenute, per lo più per via empirica, nel XIX secolo, ma, come vedremo più in dettaglio nel §6.4, trovarono una efficace spiegazione solo nel contesto della fisica quantistica all'inizio del XX secolo.

Cominciamo col dare alcune definizioni. Viene detto *Potere Emissivo* $\mathcal{E}(\nu, T, \xi)$ di un corpo (a temperatura T) la quantità di energia da esso irraggiata nell'unità di tempo e per unità di superficie nell'intervallo di frequenze compreso tra ν e $\nu + d\nu$, mentre viene detto *Potere Assorbente* $\mathcal{A}(\nu, T, \xi)$ l'analoga quantità di energia assorbita. Entrambe risultano dipendenti, oltre che dalla temperatura T e la frequenza ν , anche da un insieme di caratteristiche del corpo stesso, qui genericamente rappresentate dalla variabile ξ . Kirchhoff dimostrò che, tuttavia, il rapporto tra \mathcal{E} e \mathcal{A} è una *funzione universale*, indipendente dalla natura del corpo considerato (e quindi da ξ); in formula questa legge, detta infatti di Kirchhoff, può quindi essere scritta come:

$$\frac{\mathcal{E}(\nu, T, \xi)}{\mathcal{A}(\nu, T, \xi)} = f(\nu, T). \tag{3.29}$$

Viene detto "*Corpo Nero*" un qualsiasi corpo (sistema) capace di assorbire tutta la radiazione incidente su di esso. Una buona approssimazione di corpo nero può essere ottenuta, per esempio, da una *cavità*, nella quale l'apertura è piccola rispetto allo spazio racchiuso all'interno; il motivo è che la radiazione incidente, un volta entrata all'interno della cavità, viene ripetutamente riflessa dalle pareti, e difficilmente ne ritrova l'uscita. Con un'opportuna *normalizzazione* possiamo in tal caso porre $\mathcal{A} = 1$, per cui, dalla legge di Kirchhoff (3.29) vediamo che per i corpi neri è lo stesso Potere Emissivo $\mathcal{E}(\nu, T, \xi)$ ad essere una funzione universale $f(\nu, T)$. È proprio questa funzione ad avere, al variare della frequenza ν , l'andamento a campana asimmetrica, il cui massimo fornisce indicazioni della frequenza alla quale si ha la maggior emissione di energia irraggiata da parte

del corpo (considerato, in prima approssimazione, come un corpo nero). La lunghezza d'onda λ_m ($= c/\nu_m$) a cui corrisponde questo massimo, risulta essere inversamente proporzionale alla temperatura T secondo la cosiddetta “Legge di Spostamento di Wien”:

$$\lambda_m T = \text{costante} \quad (\simeq 0.2898 \text{ K cm}). \quad (3.30)$$

Anche questa legge, dedotta dapprima empiricamente, trova una spiegazione quantitativa nell'ambito della fisica quantistica⁷. La potenza totale irraggiata (sempre per unità di superficie) si ottiene integrando su tutte le frequenze. Il risultato costituisce la “Legge di Wien-Boltzmann”, secondo cui tale potenza W ($= dE/dA dt$) risulta essere proporzionale alla quarta potenza della temperatura (assoluta, in K):

$$\frac{dE}{dA dt} = e \sigma T^4, \quad (3.31)$$

dove $\sigma \simeq 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$ è la *costante di Stefan-Boltzmann*, ed il parametro adimensionale e ($0 \leq e \leq 1$), detto “emissività”⁸, è uguale alla frazione di energia effettivamente irraggiata rispetto a quella emessa da un *corpo nero* alla stessa temperatura.

3.3.7 Esercizio

Si vuole utilizzare un “pannello solare” (di efficienza $\eta = 40\%$) di superficie $A = 10 \text{ m}^2$ per riscaldare 50 L di acqua di uno scaldabagno, da 20°C a 40°C . Si assuma per semplicità che i raggi solari incidano perpendicolarmente sul pannello. Si determini il (minimo) tempo di esposizione solare del pannello per ottenere il desiderato riscaldamento dell'acqua. Sono noti anche i seguenti dati: raggio del Sole $R_\odot = 7 \cdot 10^5 \text{ km}$, distanza Terra-Sole $d_{TS} = 1.5 \cdot 10^8 \text{ km}$, temperatura superficiale del Sole $T_\odot = 6000 \text{ K}$, calore specifico dell'acqua $c_a = 4186 \text{ J/kg K}$.

Svolgimento:

In accordo con la Legge di Wien-Boltzmann (3.31), la potenza irraggiata dal Sole (in tutte le direzioni) è data da:

$$P_\odot = e 4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4, \quad (3.32)$$

essendo $S_\odot = 4\pi R_\odot^2$ la superficie emittente del Sole. La potenza che arriva per unità di superficie ad una distanza pari a d_{TS} è pertanto:

$$\frac{P_\odot}{4\pi d_{TS}^2}, \quad (3.33)$$

⁷Vedi §6.4.

⁸Per un corpo nero ideale $e = 1$, mentre per qualunque oggetto reale $0 < e < 1$ (corpo grigio).

da cui si ottiene quella realmente assorbita dal pannello e trasformata in *flusso di calore* fornito allo scaldabagno:

$$\frac{dE_{scald}}{dt} = \frac{P_{\odot}}{4\pi d_{TS}^2} A \eta = e \sigma A \eta T_{\odot}^4 \left(\frac{R_{\odot}}{d_{TS}} \right)^2. \quad (3.34)$$

Il tempo τ richiesto si ottiene dividendo l'energia necessaria per riscaldare l'acqua (in accordo con l'eq.(3.2)):

$$Q = c_a m_a \Delta T_a \quad (3.35)$$

per la potenza (3.34):

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{Q}{dE_{scald}/dt} = \frac{c_a m_a \Delta T_a}{e \sigma A \eta T_{\odot}^4} \left(\frac{d_{TS}}{R_{\odot}} \right)^2 \geq \\ &\geq \frac{4186 \frac{J}{kgK} \cdot 50 kg \cdot 20 K}{5.67 \cdot 10^{-8} \frac{J}{sm^2K^4} \cdot 10 m^2 \cdot 0.4 \cdot 6000^4 K^4} \left(\frac{150}{0.7} \right)^2 \simeq \\ &\simeq 654 s \simeq 11 \text{ min.}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

dove si è tenuto conto che l'emissività del Sole è $e \leq 1$.

3.3.8 Esercizio [Fisica Generale 1 per Ing. Mecc., Univ. Pisa; (13/1/2014)]

Una goccia d'acqua sferica, di massa $m = 1 g$, si trova nello spazio interstellare, lontanissima da qualunque fonte di calore. Nell'acqua è disciolta una piccola (di massa trascurabile) quantità di inchiostro nero, di modo che l'emissività e della goccia sia uguale a 1. Inizialmente la goccia ha una temperatura $T_0 = 350 K$. Assumendo che la temperatura della goccia rimanga sempre uniforme, si calcoli in quanto tempo essa si ghiaccia completamente.

Svolgimento:

La goccia d'acqua, inizialmente alla temperatura $T_0 = 350 K (\simeq 77^\circ C)$, irraggiando continuamente energia nello spazio, dapprima si raffredda fino a raggiungere la temperatura $T_* = 273 K (\simeq 0^\circ C)$, dopodiché congela. In accordo con la Legge di Wien-Boltzmann (3.31), la potenza irraggiata dalla goccia ad una generica temperatura T è data da:

$$P_{irr} = e \sigma A T^4. \quad (3.37)$$

Per determinare la superficie $A (= 4\pi r^2)$ della goccia, osserviamo che il suo raggio r può essere ottenuto dalla sua massa m e dalla densità dell'acqua ρ come segue:

3.3. TRASMISSIONE DEL CALORE: CONDUZIONE, CONVEZIONE ED IRRAGGIAMENTO 77

$$\begin{aligned}
 m = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 &\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow A = \sqrt[3]{\left(\frac{3m}{\rho}\right)^2} 4\pi. & \quad (3.38)
 \end{aligned}$$

Per la fase di raffreddamento da T_0 a T_* dobbiamo quindi uguagliare la potenza irradiata (3.37) alla quantità di calore (vivo) *perso* nell'unità di tempo in conseguenza della corrispondente diminuzione della temperatura:

$$\frac{\delta Q}{dt} = c_{aq} m \frac{dT}{dt} = -P_{irr} = -e \sigma A T^4. \quad (3.39)$$

Dall'integrazione di questa semplice equazione differenziale a variabili separabili:

$$\int_{T_0}^{T_*} \frac{dT}{T^4} = -\frac{e \sigma A}{c_{aq} m} \int_0^{t_*} dt,$$

si ottiene quindi il tempo necessario al progressivo raffreddamento della goccia, dalla temperatura iniziale T_0 a quella di congelamento T_* :

$$t_* = \frac{c_{aq}}{3 e \sigma} \sqrt[3]{\frac{m \rho^2}{36 \pi}} \left(\frac{1}{T_*^3} - \frac{1}{T_0^3} \right). \quad (3.40)$$

A questo punto la goccia, continuando ad irraggiare (ma a temperatura costante T_*), si congela (in un tempo \tilde{t}). Uguagliando l'energia necessaria per il passaggio di stato a quella irradiata (nello stesso tempo \tilde{t}), possiamo scrivere:

$$\lambda_g m = e \sigma A T_*^4 \tilde{t}, \quad (3.41)$$

dove λ_g è il calore latente di congelamento dell'acqua. Da questa formula si ottiene pertanto:

$$\tilde{t} = \frac{\lambda_g m}{e \sigma A T_*^4}. \quad (3.42)$$

Il tempo totale richiesto è evidentemente dato dalla somma di t_* (eq.(3.40)) e \tilde{t} (eq.(3.42)):

$$t_{tot} = \frac{1}{3 e \sigma} \sqrt[3]{\frac{m \rho^2}{36 \pi}} \left\{ c_{aq} \left(\frac{1}{T_*^3} - \frac{1}{T_0^3} \right) + \frac{3 \lambda_g}{T_*^4} \right\}. \quad (3.43)$$

Sostituendo i seguenti dati numerici: $e = 1$, $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} W/m^2 K^4$, $m = 1 g$, $\rho = 10^3 kg/m^3$, $c_{aq} = 4186 J/kgK$, $\lambda_g = 83 \cdot 4186 J/kg$, $T_* = 273 K$, $T_0 = 350 K$, si ottiene in definitiva:

$$t_{tot} \simeq 3500 s \sim 1 h.$$

Capitolo 4

Termodinamica

Come è noto, un “Sistema Meccanico” costituito da N particelle in moto nello spazio ha $6N$ *gradi di libertà*, nel senso che è completamente determinato dalla conoscenza ad ogni istante delle $3N$ coordinate spaziali delle particelle $((x_i, y_i, z_i), \forall i = 1, 2, \dots, N)$ e dalle $3N$ componenti delle loro velocità $((\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i), \forall i = 1, 2, \dots, N)$. L'insieme di queste informazioni descrive il cosiddetto “Stato (meccanico) del Sistema”, che può essere visto come un *punto* in uno spazio astratto $6N$ -dimensionale, detto “Spazio delle Fasi”.

Evidentemente, la conoscenza esatta dello stato *meccanico* di un sistema costituito da molte particelle ($N \gg 1$), come nel caso di una certa quantità di gas racchiuso in un recipiente, è praticamente impossibile. Dobbiamo invece accontentarci della conoscenza di alcune, *poche*, informazioni, associabili ad altrettante grandezze fisiche *macroscopiche*, che caratterizzano il comportamento *medio* del sistema, ovvero delle particelle che lo costituiscono. Per esempio, per lo spazio da esse occupato possiamo utilizzare il volume V del sistema. La pressione P fornisce invece informazioni sugli effetti degli urti (elastici) che esse hanno con le pareti del recipiente. Infine, la temperatura T fornisce indicazioni sull'energia cinetica *media* che caratterizza la loro agitazione termica. Lo stato di un sistema descritto (solo) attraverso queste variabili (P, V, T) è detto “Stato Termodinamico”, e presuppone quindi che il sistema, macroscopicamente, abbia caratteristiche omogenee. Possiamo allora associare un certo stato, per esempio denominato dalla lettera A , ad un punto di uno spazio tridimensionale (astratto) di coordinate (P_A, V_A, T_A) . Sono dette “trasformazioni termodinamiche” tutti quei processi che portano il sistema a variare il suo stato, per esempio dallo stato A allo stato B , caratterizzato da nuovi valori delle variabili termodinamiche, P_B, V_B, T_B . Se la trasformazione è sufficientemente *lenta* da poter assegnare al sistema uno stato (di equilibrio) ad ogni istante, diremo che essa è “reversibile”¹ (o “quasi statica”), altrimenti viene detta “irreversibile”. Sostanzialmente qui ci limiteremo a considerare solo le prime.

¹In tal caso è infatti possibile far tornare il sistema allo stato iniziale *ripercorrendo* la medesima successione di stati.

In generale, per un determinato *sistema*, le variabili P, V, T , non sono tutte indipendenti, essendo vincolate da una relazione funzionale, detta “Equazione di Stato”, del tipo:

$$f(P, V, T) = 0. \quad (4.1)$$

Ciò ci permette di rappresentare gli stati di un sistema, per esempio un gas, più semplicemente da un punto nel *piano* (P, V) .

4.1 I Gas Perfetti

Anche se la Termodinamica studia gli scambi termici e le trasformazioni subite da tutti i tipi di fluidi, inclusi liquidi e gas *reali*, qui ci limiteremo a considerare solo i cosiddetti “gas perfetti” (o *ideali*). Questi sono essenzialmente gas nei quali si possono trascurare sia gli effetti delle interazioni (urti) tra le molecole che il volume da esse occupato (il cosiddetto *covolume*). In pratica, quasi tutti i gas, a pressioni non troppo elevate e a temperature non troppo basse (vicine allo zero assoluto!), possono considerarsi con ottima approssimazione gas perfetti. Attraverso una serie di esperimenti portati a termine da Boyle e Gay-Lussac sappiamo che l’equazione di stato dei gas perfetti può essere scritta nella forma:

$$PV = nRT, \quad (4.2)$$

dove n è il numero di moli del gas ed R è una costante universale, il cui valore numerico dipende dal sistema di unità di misura utilizzato per esprimere le variabili termodinamiche:

$$R = \begin{cases} 8.314 \text{ J/mol K}, \\ 0.082 \text{ Latm/mol K}. \end{cases} \quad (4.3)$$

4.1.1 Cenni sulla Teoria Cinetica dei Gas

Come si è già detto, la temperatura di un sistema è quella grandezza macroscopica che caratterizza l’energia cinetica media delle particelle che lo compongono. Qui vogliamo chiarire questo fatto in modo più preciso e quantitativo, applicandolo ai gas perfetti. Supponiamo che il nostro gas sia contenuto in un recipiente di forma cubica di lato L , avente le superfici parallele agli assi cartesiani. Consideriamo una singola molecola, e sia v_x la componente della sua velocità lungo l’asse x ; questa urterà ciascuna delle pareti perpendicolari a tale asse ad ogni intervallo di tempo uguale a $\tau = 2L/v_x$, esercitando su di essa una forza pari (a meno del segno) alla variazione nell’unità di tempo della sua quantità di moto. Essendo elastico, ad ogni urto la molecola inverte la sua velocità ($v_x \rightarrow -v_x$), per cui $\Delta q_x = 2m v_x$. Dividendo quindi per il tempo τ si ottiene:

$$f_x = \frac{\Delta q_x}{\tau} = \frac{2m v_x}{\frac{2L}{v_x}} = \frac{m v_x^2}{L}. \quad (4.4)$$

Sommando (e mediando) su tutte le N particelle e dividendo per la superficie L^2 , si ottiene la pressione esercitata su ciascuna parete:

$$P = \frac{\overline{f_x} N}{L^2} = \frac{m \overline{v_x^2} N}{L^3} = \frac{N m}{V} \overline{v_x^2}, \quad (4.5)$$

da cui:

$$\overline{v_x^2} = \frac{PV}{Nm}, \quad (4.6)$$

dove, la “barra” indica i valori medi e $V = L^3$ è il volume occupato dal gas. Poiché per simmetria è lecito aspettarsi che $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$, possiamo concludere che la “velocità quadratica media” delle molecole del gas sia:

$$v_{q.m.} \equiv \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}} = \sqrt{3 \overline{v_x^2}} = \sqrt{\frac{3PV}{Nm}}. \quad (4.7)$$

Utilizzando quindi l’eq. di stato (4.2), ed essendo $N = n \mathcal{N}_A$ ($\mathcal{N}_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ è il numero di particelle per mole, detto *Numero di Avogadro*), si arriva al risultato:

$$v_{q.m.} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}, \quad (4.8)$$

dove $M = \mathcal{N}_A m$ è la “massa molare” del gas.

Per esempio, per molecole di elio (He: $M = 4 \text{ g/mol}$) ad una temperatura di $0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$, si ottiene:

$$v_{q.m.} \simeq \sqrt{\frac{3 \cdot 8.31 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 273 \text{ K}}{4 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}}} \simeq 1.3 \text{ km/s}. \quad (4.9)$$

Questa velocità è molto inferiore alla *velocità di fuga* dalla Terra, data dalla (2.184):

$$v_{fuga} = \sqrt{\frac{2G_N M_T}{R_T}} \simeq 11 \text{ km/s}.$$

Ciò nonostante, un gran numero di molecole di elio riesce a sfuggire dall’atmosfera terrestre. Il motivo sta nel fatto che, in realtà, le velocità delle molecole sono distribuite statisticamente fino a velocità molto maggiori di $v_{q.m.}$, secondo una curva a campana asimmetrica, detta *Maxwelliana*. Qui non discuteremo dei dettagli di questa distribuzione.

A questo punto possiamo anche determinare l’energia cinetica media di ciascuna molecola del gas, che dalle precedenti formule risulta essere data da:

$$\overline{E_c} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{1}{2} m \cdot \frac{3nRT}{Nm} = \frac{3}{2} K_B T, \quad (4.10)$$

dove $K_B = R/\mathcal{N}_A = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ è la *Costante di Boltzmann*. Questo risultato riflette il cosiddetto “Principio di Equipartizione” dell’energia, secondo

il quale, ad ogni grado di libertà di un sistema compete, in *media*, un'energia pari a $\frac{1}{2} K_B T$. Poiché i gas monoatomici (come l'elio He), sono costituiti da particelle che hanno solo i tre gradi di libertà relativi al loro moto traslazionale, la loro energia cinetica media è in effetti data dalla (4.10). D'altra parte, le molecole dei gas biatomici (come l'ossigeno O_2 e l'idrogeno H_2), oltre ad avere gli stessi tre gradi di libertà traslazionali, ne hanno altri due relativi al loro moto rotazionale, per cui la loro energia cinetica media risulta essere:

$$\overline{E_c}(\text{biat.}) = \frac{5}{2} K_B T. \quad (4.11)$$

Infine, nel caso di gas *poliatomici* con molecole non allineate, come il metano (CH_4) o l'ammoniaca (NH_3), i gradi di libertà addizionali sono tre, e quindi si ha $\overline{E_c} = 3 K_B T$.

Per i gas perfetti, come si è detto, sono trascurabili gli effetti delle interazioni tra le particelle, per cui l'“Energia Interna” U è dovuta esclusivamente al contributo dell'energia cinetica. Per n moli si può quindi scrivere:

$$U(T) = n c_V T, \quad (4.12)$$

dove la costante di proporzionalità c_V , detta, per motivi che saranno chiariti nel §4.1.3, “capacità termica molare a volume costante”, vale:

$$c_V = \begin{cases} \frac{3}{2} R, & (\text{per gas monoatomici}) \\ \frac{5}{2} R, & (\text{per gas biatomici}) \\ 3 R, & (\text{per gas poliatomici}). \end{cases} \quad (4.13)$$

4.1.2 Il Primo Principio della Termodinamica

Come abbiamo visto nel §2.6.2, per un sistema dinamico l'energia meccanica, definita come somma dell'energia cinetica e di quella potenziale, resta invariata solo se il sistema è “conservativo”, ovvero se su di esso compiono lavoro solo *forze conservative*². Al contrario, in presenza di lavoro compiuto da forze non-conservative (per esempio dissipative come le forze di attrito), l'energia meccanica diminuisce, trasformandosi in altre forme di energia, come quella termica. In effetti, l'energia *totale* resta sempre invariata; anzi, possiamo sicuramente affermare che il “Principio di Conservazione dell'Energia”³ è uno dei pilastri fondamentali di tutta la Fisica.

In termodinamica, conseguenza diretta della Legge di Conservazione dell'Energia è il cosiddetto “Primo Principio”, secondo il quale, considerato un generico

²Ricordiamo, dal §2.6.1, che sono dette *conservative* quelle forze per le quali il lavoro compiuto durante un certo *spostamento* del sistema, non dipende dal particolare percorso effettuato nello spazio, ma solo dai punti di partenza e di arrivo; come corollario, si ha che per tali forze il lavoro compiuto durante un qualsiasi percorso chiuso è sempre nullo.

³Vedi *Nota 21* del Capitolo 2.

sistema termodinamico⁴, il *Calore* Q che questo assorbe (dall'ambiente esterno) deve essere uguale alla somma della variazione ΔU della sua *Energia Interna* e del *Lavoro* L che esso compie sull'esterno. Possiamo pertanto esprimere questo principio come:

$$Q = \Delta U + L. \quad (4.14)$$

Un esempio concreto può essere quello di un gas contenuto in un recipiente racchiuso da un pistone mobile; il calore fornito al gas, oltre a poterne provocare un innalzamento della temperatura, può far sì che questo, espandendosi, spinga il pistone compiendo così un certo lavoro.

Vediamo come calcolare questo lavoro nel caso di una generica trasformazione termodinamica. Quando le forze di pressione del gas causano uno spostamento infinitesimo dx del pistone (di sezione S), queste compiono un lavoro dato dal prodotto della pressione per la variazione di volume dello stesso gas:

$$\delta L = F \cdot dx = P S dx = P dV; \quad (4.15)$$

pertanto, per una trasformazione *finita* da uno stato A ad uno stato B , il lavoro compiuto dal gas si ottiene integrando questa espressione:

$$L_\gamma(A \rightarrow B) = \int_{A \gamma}^B P dV, \quad (4.16)$$

dove si è indicato con γ la *curva* che descrive la trasformazione nel piano (P, V) . Ne consegue un'utile interpretazione geometrica: il lavoro compiuto in una generica trasformazione (reversibile) da uno stato A ad uno stato B , è dato dall'area sottesa alla curva che caratterizza tale trasformazione, nel piano (P, V) . Ciò significa automaticamente che questo lavoro dipende dalla particolare trasformazione, e non solo dagli stati iniziale e finale del gas. Per lo stesso motivo, in un'arbitraria trasformazione ciclica, nella quale cioè il gas ritorna allo stato iniziale, il lavoro totale non sarà nullo:

$$\oint_\gamma \delta L \neq 0,$$

essendo uguale all'area racchiusa dalla curva chiusa γ .

In termodinamica, le grandezze per le quali la variazione non dipende dalla particolare trasformazione avvenuta, ma solo dagli stati iniziale e finale, sono dette "Funzioni di Stato"; per esse, evidentemente, la variazione in una qualsiasi trasformazione ciclica è nulla. Un esempio è proprio l'*Energia Interna* U , per la quale:

$$\oint_\gamma dU = 0. \quad (4.17)$$

⁴Noi assumeremo sempre sistemi "chiusi", cioè sistemi che possono scambiare energia con l'ambiente esterno, ma non materia.

Dal *Primo Principio*, espresso dalla (4.14), vediamo quindi che anche il *Calore* non è una Funzione di Stato, poiché:

$$\oint_{\gamma} \delta Q = \oint_{\gamma} dU + \oint_{\gamma} \delta L \equiv \oint_{\gamma} \delta L \neq 0. \quad (4.18)$$

Per questo motivo distinguiamo il modo di esprimere la variazione infinitesima dell'Energia interna (dU) dalle corrispondenti quantità di calore e lavoro (δL e δQ) nel *Primo Principio* espresso in forma differenziale⁵:

$$\delta Q = dU + \delta L. \quad (4.19)$$

4.1.3 Trasformazioni Termodinamiche elementari

Le variabili termodinamiche che definiscono lo stato di un sistema sono, come si è visto, la *pressione* P , il *volume* V , e la *temperatura* T , vincolate dall'equazione di stato (4.1), che nel caso dei gas perfetti è data dall'eq.(4.2).

Possiamo definire *Trasformazioni Termodinamiche elementari* le trasformazioni reversibili nelle quali una di queste variabili resta invariata. In particolare, vengono dette “isocore” le trasformazioni in cui $V = \text{costante}$, “isobare” quelle in cui $P = \text{costante}$, e infine “isoterme” quelle in cui è la temperatura T a restare *costante*. Applichiamo quindi il Primo Principio (4.19) a ciascuna di queste trasformazioni.

- *Trasformazione Isocora*: $V = \text{costante}$.

Nel piano (P, V) queste trasformazioni sono rappresentate da linee rette parallele all'asse delle ordinate (P). Non essendoci alcuna variazione di volume, in accordo con l'eq.(4.15), il lavoro δL è nullo, per cui dalla (4.19) si ha:

$$\delta Q = n c_V dT = dU, \quad (4.20)$$

dove si è definito:

$$c_V = \frac{1}{n} \left. \frac{\delta Q}{dT} \right|_V \quad (4.21)$$

la “Capacità Termica molare a volume costante”. In forma *finita* troviamo perciò:

$$Q = n c_V \Delta T = \Delta U. \quad (4.22)$$

La proporzionalità tra la variazione dell'*Energia Interna* e la variazione della temperatura T ci suggerisce che U è una “Funzione di Stato”, per cui in realtà potremo utilizzare l'eq.(4.22) per determinarne le variazioni,

⁵Ciò equivale a dire che δL e δQ non sono *differenziali esatti*.

indipendentemente dal tipo di trasformazione subita dal gas, sia reversibile che irreversibile. Il valore di c_V dipende dalla natura *monoatomica*, *biatomica*, o *poliatomica* del gas, come risulta dalla Teoria Cinetica (eq.(4.21)).

- *Trasformazione Isobara*: $P = \text{costante}$.

Queste trasformazioni sono invece rappresentate nel piano (P, V) da linee rette parallele all'asse delle ascisse (V) . Definendo la "Capacità Termica molare a pressione costante" come:

$$c_P = \frac{1}{n} \left. \frac{\delta Q}{dT} \right|_P, \quad (4.23)$$

l'applicazione del Primo Principio (4.19) dà:

$$\delta Q = n c_P dT = dU + P dV. \quad (4.24)$$

Utilizzando quindi il risultato precedente (4.20) per dU e poiché, per P costante si ha: $P dV = d(PV) = n R dT$, si ottiene:

$$n c_P dT = n (c_V + R) dT,$$

ovvero:

$$c_P - c_V = R, \quad (4.25)$$

detta *Relazione di Meyer*. Usando le (4.13) troviamo allora:

$$c_P = \begin{cases} \frac{5}{2} R, & \text{(per gas monoatomici)} \\ \frac{7}{2} R, & \text{(per gas biatomici)} \\ 4 R, & \text{(per gas poliatomici)}. \end{cases} \quad (4.26)$$

Poiché l'area *sottesa* ad una trasformazione isobara⁶ è semplicemente un rettangolo, il calcolo del lavoro risulta immediato:

$$L(A \rightarrow B) = \int_A^B P dV = P (V_B - V_A). \quad (4.27)$$

- *Trasformazione Isoterma*: $T = \text{costante}$.

Poiché a temperatura costante la pressione ed il volume sono inversamente proporzionali, come si evince dall'equazione di stato (4.1), queste trasformazioni sono rappresentate graficamente da rami di iperbole

⁶D'ora in poi sottintenderemo sempre il riferimento al piano (P, V) .

equilatera. Inoltre, per quanto visto precedentemente (eq.(4.22)), si ha: $\Delta U = n c_V \Delta T = 0$. Il Primo Principio (4.14) implica allora che in questo caso il calore *assorbito* sia uguale al lavoro *compiuto*, lavoro che può essere calcolato come segue:

$$\begin{aligned} Q(A \rightarrow B) &= L(A \rightarrow B) = \int_A^B P dV = \\ &= n R T_A \int_A^B \frac{dV}{V} = n R T_A \log \left(\frac{V_B}{V_A} \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

- *Trasformazione Adiabatica:* $Q = 0$.

Il Primo Principio scritto in forma differenziale dato in eq.(4.19), con $\delta Q = 0$ dà:

$$0 = \delta Q = n c_V dT + P dV ,$$

dove si è tenuto conto della variazione infinitesima dell'Energia Interna data in (4.20). Utilizzando l'equazione di stato (4.2), dividendo per $n c_V$, e integrando tra A e B , si ottiene allora:

$$\int_A^B \frac{dT}{T} + \frac{R}{c_V} \int_A^B \frac{dV}{V} = 0 ,$$

da cui:

$$\log \left(\frac{T_B}{T_A} \right) + \frac{R}{c_V} \log \left(\frac{V_B}{V_A} \right) = 0 .$$

Questa relazione è equivalente alla seguente formula:

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \quad T V^{\gamma-1} = \text{costante} , \quad (4.29)$$

dove si è posto:

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \begin{cases} \frac{5}{3} , & \text{(per gas monoatomici)} \\ \frac{7}{5} , & \text{(per gas biatomici)} \\ \frac{4}{3} , & \text{(per gas poliatomici).} \end{cases} \quad (4.30)$$

L'equazione di stato (4.2) permette anche di esprimere la (4.29) in termini delle variabili P e V :

$$P_B V_B^\gamma = P_A V_A^\gamma \quad \Rightarrow \quad P V^\gamma = \text{costante} . \quad (4.31)$$

Essendo $\gamma > 1$ per tutti i tipi di gas, questa relazione funzionale tra pressione e volume ci porta a rappresentare le trasformazioni adiabatiche (nel piano (P, V)) con linee curve *più ripide* rispetto alle isoterme⁷.

Anche per le adiabatiche si potrebbe calcolare il lavoro attraverso l'integrale (4.16), utilizzando la (4.31); tuttavia, con la diretta applicazione del Primo Principio (4.14) si ottiene, più semplicemente:

$$L(A \rightarrow B) = -\Delta U = -n c_V (T_B - T_A). \quad (4.32)$$

4.1.4 Trasformazioni Politropiche

Tutte le precedenti trasformazioni termodinamiche elementari, incluse le adiabatiche, fanno parte di un'ampia classe di trasformazioni, dette "Politropiche", caratterizzate da una *Capacità Termica* costante. Cercheremo adesso la loro generica espressione funzionale.

Detta c_k tale generica Capacità Termica (molare), dal Primo Principio (4.19) si ha:

$$\delta Q = n c_k dT = n c_V dT + P dV,$$

da cui:

$$c_k = c_V + \frac{P}{n} \frac{dV}{dT}. \quad (4.33)$$

Usando di nuovo l'equazione di stato (4.2) ed eliminando la pressione P , si arriva a:

$$\frac{c_k - c_V}{R} \equiv -K = \frac{d \log V}{d \log T}, \quad (4.34)$$

che integrata tra gli stati A e B dà:

$$\begin{aligned} d \log V &= -K (d \log T) = d \log (T^{-K}) && \Rightarrow \\ \Rightarrow \log \left(\frac{V_B}{V_A} \right) &= \log \left(\frac{T_B^{-K}}{T_A^{-K}} \right), && (4.35) \end{aligned}$$

ovvero:

$$V T^K = \text{costante}. \quad (4.36)$$

A ciascun valore del parametro K corrisponde una trasformazione politropica distinta, caratterizzata da una Capacità Termica che possiamo ricavare dalla (4.34):

⁷Infatti, come si evince dalle (4.29), in un'espansione adiabatica si ha un abbassamento della temperatura.

$$c_k = c_V - K R. \quad (4.37)$$

È semplice verificare che tutte le trasformazioni analizzate nel §4.1.3 sono politropiche corrispondenti a particolari valori del parametro K . Si trova infatti:

$$\left\{ \begin{array}{l} K = 0 \quad \Rightarrow \quad V = \text{cost. (isocora); } c_0 = c_V, \\ K = -1 \quad \Rightarrow \quad P = \text{cost. (isobara); } c_{-1} = c_P, \\ K \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad T = \text{cost. (isoterma); } c_\infty \rightarrow \infty, \\ K = \frac{c_V}{R} = \frac{1}{\gamma - 1} \quad \Rightarrow \quad Q = 0 \text{ (adiabatica); } c = 0. \end{array} \right. \quad (4.38)$$

4.2 Ciclo di Carnot ed Entropia

Le trasformazioni cicliche hanno un ruolo particolarmente importante in Termodinamica, essendo associate alle *macchine termiche* (o *frigorifere*). Torneremo su questo aspetto nel §4.4. Per il momento osserviamo soltanto che, in virtù del Primo Principio (4.14), essendo nulla la variazione di Energia Interna (eq.(4.17)), in qualsiasi ciclo termodinamico si ha:

$$Q \equiv Q_1 - Q_2 = L. \quad (4.39)$$

dove si è indicato con Q_1 il *calore assorbito* e con Q_2 quello *ceduto* in valore assoluto⁸.

Tra tutti i cicli, fondamentale è quello di Carnot, perché è proprio questo ciclo che ci porterà ad introdurre il concetto di *Entropia* ed enunciare il “Secondo Principio” della Termodinamica. Questo ciclo è costituito da due trasformazioni isoterme (l’espansione $A \rightarrow B$ alla temperatura maggiore T_1 , e la compressione $C \rightarrow D$ a quella inferiore T_2) e da due adiabatiche ($B \rightarrow C$ e $D \rightarrow A$). Determiniamo i calori scambiati durante l’intero ciclo:

- $A \rightarrow B$:

$$P_A V_A = P_B V_B = n R T_1. \quad (4.40)$$

In tal caso, dalla (4.28), si ha direttamente:

$$Q_{AB} = n R T_1 \int_A^B \frac{dV}{V} = n R T_1 \log \left(\frac{V_B}{V_A} \right) \equiv Q_1 (> 0). \quad (4.41)$$

⁸Nel §4.4, riferendosi alle sole *macchine termiche*, denoteremo con Q_C e Q_F questi calori, essendo in tal caso scambiati, rispettivamente, con termostati alla temperatura *più calda* e *più fredda*.

- $B \rightarrow C$:

$$P_B V_B^\gamma = P_C V_C^\gamma . \quad (4.42)$$

- $C \rightarrow D$:

$$P_C V_C = P_D V_D = n R T_2 , \quad (4.43)$$

e questa volta, trattandosi di *calore ceduto* (< 0):

$$Q_{CD} = n R T_2 \int_C^D \frac{dV}{V} = n R T_2 \log \left(\frac{V_D}{V_C} \right) \equiv -Q_2 \quad (< 0) . \quad (4.44)$$

- $D \rightarrow A$:

$$P_D V_D^\gamma = P_A V_A^\gamma . \quad (4.45)$$

Il rapporto tra i due calori Q_1 e Q_2 risulta quindi essere dato da:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} \frac{\log \left(\frac{V_C}{V_D} \right)}{\log \left(\frac{V_B}{V_A} \right)} . \quad (4.46)$$

Utilizzando le eq.(4.40), (4.42), (4.43) e (4.45), troviamo:

$$\begin{aligned} \frac{V_B}{V_A} &= \frac{P_A}{P_B} = \left(P_D \frac{V_D^\gamma}{V_A^\gamma} \right) \left(\frac{1}{P_C} \frac{V_B^\gamma}{V_C^\gamma} \right) = \\ &= \frac{V_C}{V_D} \left(\frac{V_D V_B}{V_A V_C} \right)^\gamma , \end{aligned} \quad (4.47)$$

da cui:

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D} .$$

Perciò, la formula precedente (4.46) si semplifica, e otteniamo⁹:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} . \quad (4.48)$$

Essendo $Q_1 = Q_{AB}$ e $Q_2 = -Q_{CD}$, possiamo quindi scrivere:

$$\frac{Q_{AB}}{T_1} + \frac{Q_{CD}}{T_2} = 0 .$$

⁹Ciò dà anche un significato fisico *preciso* al concetto di Temperatura Assoluta.

Tenendo infine conto che ogni ciclo reversibile può essere visto come una successione di infiniti cicli di Carnot, l'uno con parametri di temperatura vicini a quelli del successivo, arriviamo alla conclusione che *per ogni ciclo reversibile* deve valere la seguente formula:

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} = 0 \quad (\text{per cicli reversibili}), \quad (4.49)$$

ovvero, considerando quantità di calore infinitesime δQ , ciascuna scambiata ad una determinata temperatura T :

$$\oint_{\gamma(\text{rev})} \frac{\delta Q}{T} = 0. \quad (4.50)$$

Detto altrimenti, dallo studio del ciclo di Carnot abbiamo dedotto che “*la somma algebrica dei rapporti tra i calori scambiati e la temperatura alla quale avvengono questi scambi è nulla per ogni ciclo reversibile*”. Se il ciclo fosse invece “irreversibile”, le formule (4.49) e (4.50) andrebbero scritte sotto forma di disuguaglianza:

$$\sum_i \frac{\delta Q_i}{T_i} \leq 0 \quad (\text{per cicli irreversibili}), \quad (4.51)$$

$$\oint_{\gamma(\text{irrev})} \frac{\delta Q}{T} \leq 0,$$

dette infatti “disuguaglianze di Clausius”.

Il risultato espresso dalla formula (4.50) mostra che, nonostante il *calore* non sia una *funzione di stato* (come si evince dalla (4.18)), la quantità $\delta Q/T$, almeno per processi reversibili, è esprimibile come il differenziale (esatto) di una *nuova* funzione di stato:

$$\left. \frac{\delta Q}{T} \right|_{\text{rev}} =: dS, \quad (4.52)$$

detta “entropia”, per la quale quindi:

$$\oint_{\gamma} dS = 0. \quad (4.53)$$

Essendo funzione di stato, la sua variazione durante una qualsiasi trasformazione - sia reversibile che irreversibile - dipende soltanto dagli stati iniziale A e finale B . Utilizzando il Primo Principio (4.19) col lavoro dato dalla (4.15) si ottiene, quindi:

$$\begin{aligned}
\Delta S_{AB} \equiv S_B - S_A &= \int_A^B \frac{\delta Q}{T} = \int_A^B \frac{dU + PdV}{T} = \\
&= n c_V \int_A^B \frac{dT}{T} + n R \int_A^B \frac{dV}{V} = \\
&= n c_V \log \left(\frac{T_B}{T_A} \right) + n R \log \left(\frac{V_B}{V_A} \right),
\end{aligned} \tag{4.54}$$

ovvero, esprimendo il risultato in termini delle variabili¹⁰ P e T :

$$\begin{aligned}
\Delta S_{AB} &= n c_V \log \left(\frac{T_B}{T_A} \right) + n R \log \left(\frac{P_A}{P_B} \frac{T_B}{T_A} \right) = \\
&= n c_P \log \left(\frac{T_B}{T_A} \right) - n R \log \left(\frac{P_B}{P_A} \right),
\end{aligned} \tag{4.55}$$

dove si è anche fatto uso della Relazione di Meyer (4.25).

4.3 Il Secondo Principio della Termodinamica

Il Primo Principio, come si è detto, non è che espressione del Principio (universale) di Conservazione dell'Energia. Applicato in particolare all'intero Universo, che è evidentemente un *Sistema Isolato*, afferma semplicemente che in questo sono ammissibili, almeno in linea di principio, tutti i possibili processi che mantengono costante l'Energia totale. Il fattore "tempo" non gioca alcun ruolo. Il motivo è che tutte le leggi fisiche della meccanica, come pure il Primo Principio della Termodinamica, sono simmetriche rispetto all'*inversione temporale* $t \rightarrow -t$. Tuttavia, l'esperienza ci insegna che in natura esistono processi *spontanei* e processi *non spontanei*. Facendo un classico esempio, il Primo Principio non può spiegare perché il calore fluisca naturalmente solo da un corpo più caldo ad un corpo più freddo, fino al raggiungimento di una medesima temperatura; l'energia sarebbe conservata anche se il corpo caldo assorbisse energia da quello freddo aumentando la propria temperatura, provocando un raffreddamento di quest'ultimo. In chimica esistono molte reazioni che sappiamo non poter avvenire spontaneamente... perché? La risposta viene data dal "Secondo Principio della Termodinamica", un principio strettamente legato al concetto di Entropia. Solitamente viene presentato sotto forma dei seguenti tre enunciati, distinti ma equivalenti:

- **Enunciato di Clausius:** *"In un qualsiasi processo termodinamico, non è possibile avere, come unico risultato, il passaggio di calore da un corpo più freddo ad uno più caldo."*

¹⁰Eliminando il volume V attraverso l'equazione di stato (4.2), dalla quale: $V_B/V_A = \frac{nRT_B/P_B}{nRT_A/P_A} = \frac{P_A}{P_B} \frac{T_B}{T_A}$.

- **Enunciato di Kelvin:** “In una qualsiasi trasformazione termodinamica ciclica non è possibile avere, come unico risultato, la completa trasformazione di calore prelevato da un’unica sorgente, in lavoro”.
- **Legge dell’Aumento dell’Entropia:** “Con lo scorrere del tempo, l’Entropia totale dell’Universo, non può che aumentare”. O, equivalentemente: “L’Entropia totale dell’Universo resta costante se le trasformazioni sono reversibili, mentre aumenta se sono irreversibili”.

Tralascieremo qui la dimostrazione dell’equivalenza degli enunciati di Clausius e Kelvin, soffermandoci invece sul significato di quello relativo all’aumento dell’entropia.

Consideriamo una qualsiasi trasformazione irreversibile tra gli stati A e B . Possiamo sempre supporre di poter far tornare il sistema allo stato di partenza attraverso un’opportuna trasformazione reversibile: $(B \rightarrow A)_{rev}$. L’insieme delle due trasformazioni costituisce quindi, globalmente, una trasformazione ciclica *irreversibile*, e in quanto tale, deve valere la disuguaglianza di Clausius (4.51), per cui:

$$\begin{aligned} \oint \frac{\delta Q}{T} &= \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \Big|_{irrev} + \int_B^A \frac{\delta Q}{T} \Big|_{rev} \leq 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \Big|_{irrev} + (S_A - S_B) &\leq 0 \quad \Rightarrow \quad (4.56) \\ \Rightarrow S_B - S_A &\geq \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \Big|_{irrev}; \end{aligned}$$

e poiché il *Sistema Universo* è per definizione *isolato*, non scambiando energia con l’esterno, l’integrale a membro destro è identicamente nullo. Otteniamo pertanto il risultato cercato:

$$S_B \geq S_A, \quad (4.57)$$

ovvero la legge dell’aumento dell’entropia per sistemi isolati.

Torneremo sulle implicazioni che questo Principio ha sulle Macchine Termiche nel §4.4. Qui vogliamo solo aggiungere alcune considerazioni sul *significato* fisico dell’entropia e del perché debba sempre (globalmente) aumentare.

Un aiuto ci viene dalla formula di Boltzmann, che associa l’entropia S di uno stato alla cosiddetta “probabilità termodinamica” W . Poiché l’entropia è una grandezza *estensiva*, e quindi l’entropia di due sottosistemi α e β è data dalla somma delle rispettive entropie: $S(\alpha \cup \beta) = S(\alpha) + S(\beta)$, mentre le probabilità degli stati vanno moltiplicate: $W(\alpha \cup \beta) = W(\alpha) \cdot W(\beta)$, ne consegue che l’entropia deve essere proporzionale al *logaritmo* della probabilità termodinamica. Così arriviamo alla formula di Boltzmann, secondo la quale:

$$S = K_B \log W, \quad (4.58)$$

dove la costante di proporzionalità risulta essere proprio la *Costante di Boltzmann* ($K_B = R/\mathcal{N}_A$).

Da questa relazione deriva la ben nota associazione tra entropia e “disordine”: poiché gli stati *disordinati* corrispondono tipicamente ad un numero maggiore di configurazioni del sistema rispetto agli stati più ordinati, basti pensare ad un mazzo di carte *mescolate* piuttosto che *ordinate*, i primi sono molto più “probabili”. Pertanto, visto che evidentemente i sistemi evolvono spontaneamente verso gli stati più probabili (e quindi più disordinati), l’eq.(4.58) ci informa che questi sono anche quelli caratterizzati da una maggior entropia. In altre parole, possiamo affermare che: *In Natura i sistemi evolvono spontaneamente verso gli stati più disordinati*. Come premesso, il Secondo Principio risponde alla domanda “In che direzione evolvono i sistemi?”: *I sistemi evolvono in una direzione tale da causare un aumento dell’entropia dell’Universo*. Da ciò segue anche la ben nota correlazione, forse più “metafisica” che fisica, tra *Entropia* e “Freccia del Tempo”.

4.3.1 Esempio

Si vuole determinare la variazione di entropia che si ha nell’espansione isoterma di un gas. Inoltre, si desidera calcolare anche la probabilità che il gas stesso si contragga spontaneamente dal volume finale a quello iniziale.

Dall’eq.(4.54) si ha direttamente:

$$\Delta S = n R \log \left(\frac{V_B}{V_A} \right).$$

Per determinare la probabilità che avvenga una contrazione *spontanea* dal volume finale V_B a quello iniziale V_A , osserviamo che tale processo implicherebbe una *diminuzione* di entropia pari a $-\Delta S$, per cui, dalla (4.58), si ha:

$$-\Delta S = K_B \log W(B \rightarrow A),$$

ovvero:

$$W(B \rightarrow A) = e^{-\Delta S/K_B} = \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{-n\mathcal{N}_A},$$

solitamente un numero estremamente piccolo; per esempio, per la *contrazione spontanea* di 10 mol di gas da un volume $V_B = 10 L$ a $V_A = 5 L$, si otterrebbe:

$$W \simeq 2^{-6 \cdot 10^{24}} !!!$$

Questo significa ovviamente che è estremamente improbabile che avvenga la contrazione spontanea del gas, cioè senza l’azione di forze esterne.

4.4 Sull'Entropia e le Macchine Termiche

Il “Secondo Principio della Termodinamica” e il concetto di “Entropia” introdotti nella sezione precedente giocano un ruolo particolare nello studio delle *Macchine Termiche*. In generale, una macchina termica è un *sistema* capace di convertire energia assorbita sotto forma di calore in lavoro *utile*, per esempio in lavoro meccanico. Essenzialmente, ed in modo assolutamente generale, una macchina termica richiede i seguenti tre ingredienti:

- un *termostato*¹¹ “caldo”, a temperatura T_C ;
- un *termostato* “freddo”, a temperatura T_F ;
- una *sostanza*, *e.g.*, una certa quantità di gas racchiusa in un recipiente chiuso da un pistone mobile, che viene sottoposta ad una certa trasformazione ciclica (reversibile).

In ogni ciclo la *sostanza* scambia calore (energia) con i due termostati; in particolare, assorbe un certo calore Q_C dal termostato più *caldo*, cedendone una parte (Q_F) a quello più *freddo* (spesso, semplicemente l'ambiente circostante). In questo modo la *macchina* riesce a compiere un lavoro (positivo, utilizzabile) L , che in virtù del “Primo Principio della Termodinamica” è dato da:

$$\Delta Q \equiv Q_C - Q_F = \Delta U + L \equiv L, \quad (4.59)$$

dove si è tenuto conto che la variazione di Energia Interna (ΔU) è nulla in qualsiasi trasformazione ciclica (eq.(4.17)).

Il rendimento di una macchina termica è definito come il rapporto tra il lavoro compiuto L ed il calore assorbito Q_C durante ciascun ciclo¹²:

$$\eta = \frac{L}{Q_C} = \frac{Q_C - Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{Q_F}{Q_C}. \quad (4.60)$$

Il solo *Primo Principio*, espressione della Legge di Conservazione dell'Energia, non pone alcun limite superiore al rendimento di una macchina termica, che pertanto in linea di principio potrebbe anche tendere (o addirittura essere uguale) a 1 (se $Q_C \gg Q_F$); ciò sarebbe equivalente a dire che “è possibile trasformare completamente in lavoro (utile) il calore prelevato da un'unica sorgente (calda, a temperatura T_C)”. Purtroppo (!!!) il “Secondo Principio della Termodinamica” ci dice che ciò non è possibile, ovvero che, necessariamente, deve essere presente anche una certa quantità di calore che viene ceduta al termostato più freddo (a temperatura T_F). Mostreremo ora che tale affermazione è anche equivalente a porre un limite invalicabile per il rendimento delle macchine termiche.

¹¹Un *termostato* è un sistema caratterizzato da una grande capacità termica ($C \rightarrow \infty$), in conseguenza della quale la sua temperatura può ritenersi costante durante l'intero processo.

¹²Ragion per cui, talvolta, viene anche detto come rapporto tra “ciò che ottieni” e “ciò che paghi” (in inglese, *the ratio of “what you get” to “what you pay”*).

Come abbiamo visto nel §4.3, il “Secondo Principio” afferma che, col trascorrere del tempo¹³, l'entropia dell'intero Universo non può che aumentare. In particolare, l'entropia dell'Universo, o più in generale di un qualsiasi *Sistema Isolato*, aumenta in qualsiasi processo *irreversibile* (i.e., “spontaneo”), mentre resta invariata in quelli *reversibili*:

$$\begin{cases} \Delta S_{univ.} > 0, & \text{(processi irreversibili),} \\ \Delta S_{univ.} = 0, & \text{(processi reversibili).} \end{cases} \quad (4.61)$$

Consideriamo quindi la nostra generica macchina termica: i due termostati, insieme alla *sostanza* che opera nella macchina stessa costituiscono un sistema isolato (non interagendo col resto dell'Universo), per cui il Secondo Principio implica che:

$$\Delta S_{univ.} \equiv \Delta S_C + \Delta S_F + \Delta S_{sostanza} \geq 0. \quad (4.62)$$

Tuttavia, essendo S una *funzione di stato* (come l'energia interna U), la variazione di entropia per la sola *sostanza* che subisce la trasformazione ciclica nella macchina è nulla ($\Delta S_{sostanza} = 0$). Pertanto, la variazione di entropia totale dell'Universo è dovuta solo al contributo dato dagli scambi termici dei due termostati, scambi che come si è detto avvengono alle rispettive temperature. Si ottiene quindi:

$$0 \leq \Delta S_{univ.} = \Delta S_C + \Delta S_F = -\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F}, \quad (4.63)$$

dove si è tenuto conto che il termostato *caldo* cede calore ($Q(\text{term. caldo}) = -Q_C < 0$), mentre quello *freddo* lo assorbe ($Q(\text{term. freddo}) = Q_F > 0$). L'aumento di entropia dell'Universo (4.63) implica quindi che:

$$\frac{Q_F}{T_F} \geq \frac{Q_C}{T_C}, \quad (4.64)$$

ovvero:

$$\frac{Q_F}{Q_C} \geq \frac{T_F}{T_C}, \quad (4.65)$$

da cui deduciamo l'esistenza di un *limite superiore* invalicabile per il rendimento di una generica macchina termica:

$$\eta = 1 - \frac{Q_F}{Q_C} \leq 1 - \frac{T_F}{T_C}. \quad (4.66)$$

Il rendimento *limite* ($\eta_C = 1 - \frac{T_F}{T_C}$) è quello ottenibile da una macchina termica nella quale il gas compie proprio il ciclo di Carnot¹⁴ studiato nel §4.2, come mostra il confronto tra le eq.(4.48) e (4.65).

¹³Questa è l'origine del legame tra la cosiddetta “freccia del tempo” e l'entropia dell'Universo.

¹⁴Per questo motivo, tale macchina viene anche detta *perfetta*.

Il fatto che nessuna macchina termica che operi tra due temperature estreme assegnate (T_C e T_F) possa avere un rendimento maggiore di quello del corrispondente ciclo di Carnot (η_C) operante tra le stesse temperature, è detto “Teorema di Carnot”.

4.5 Esercizi Risolti di Termodinamica

Prima di concludere questo capitolo, vogliamo discutere qualche altro esercizio, con l'intento di chiarire ulteriormente i concetti trattati nelle sezioni precedenti, offrendo nel contempo qualche esempio in più di applicazione.

4.5.1 Esercizio (Rendimento di un Ciclo termodinamico)

Dieci moli di un gas monoatomico, inizialmente racchiusi in un volume $V_A = 50 L$ alla pressione $P_A = 250 atm$, subiscono la seguente trasformazione ciclica (reversibile): vengono dapprima espansi isobaricamente fino a raggiungere (stato B) un volume triplo di quello iniziale, dopodiché subiscono adiabaticamente un'ulteriore espansione fino a raggiungere uno stato (C) caratterizzato dalla stessa temperatura iniziale (T_A). Infine il gas viene ricondotto allo stato iniziale A attraverso un'opportuna compressione isoterma. Determinare il rendimento del ciclo. Quanto sarebbe il rendimento della macchina di Carnot capace di lavorare tra le due temperature estreme presenti nel ciclo suddetto?

Svolgimento:

Per tutti i cicli (reversibili) il procedimento per arrivare a determinare il rendimento è lo stesso. Bisogna innanzitutto determinare, per ogni trasformazione, sia i valori delle *variabili* termodinamiche (P, V, T) degli stati iniziale e finale, che i relativi calori scambiati. Il calore totale assorbito, detto Q_1 , è la somma di tutti i calori *positivi*, quello ceduto, Q_2 , è la somma di quelli *negativi*, ma in valore assoluto (cosicché anche $Q_2 > 0$). Allora, il rendimento cercato è dato (come nell'eq.(4.60)) semplicemente dalla seguente formula:

$$\eta = 1 - \frac{\sum_i |Q_{i(ced)}|}{\sum_i Q_{i(ass)}} \equiv 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (4.67)$$

Applichiamo quindi quanto detto al presente esercizio.

- B : essendo $P_B = P_A$, $V_B = 3V_A$, si ottiene:

$$T_B = \frac{P_B V_B}{n R} = \frac{P_A 3V_A}{n R} = 3T_A;$$

quindi, il calore scambiato nella trasformazione $A \rightarrow B$ si calcola usando l'eq.(4.24):

$$Q_{AB} = n c_P (T_B - T_A) = 2 n c_P T_A = 5 n R T_A,$$

essendo $C_P = \frac{5}{2} R$ per i gas monoatomici (vedi eq.(4.26)).

- C : dall'eq.(4.29) si ha: $T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$, con $T_C = T_A$ e $V_B = 3 V_A$, da cui:

$$V_C^{\gamma-1} = 3 (3 V_A)^{\gamma-1} = 3^\gamma V_A^{\gamma-1},$$

ovvero:

$$V_C = 3^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} V_A.$$

Naturalmente in questo caso non c'è da calcolare il calore, trattandosi di una trasformazione adiabatica.

- $C \rightarrow A$: applicando direttamente l'eq.(4.28) otteniamo:

$$\begin{aligned} Q_{CA} = L_{CA} &= \int_A^C P dV = n R T_A \log \frac{V_A}{V_C} = \\ &= -n R T_A \log \left(3^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right) = \\ &= -n R T_A \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \log 3 = \\ &= -\frac{5}{2} n R T_A \log 3 \quad (< 0). \end{aligned}$$

Pertanto, il rendimento del ciclo risulta essere:

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{\frac{5}{2} n R T_A \log 3}{5 n R T_A} = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \log 3 \simeq 0.451. \end{aligned}$$

Il ciclo di Carnot avente le stesse temperature estreme del ciclo che abbiamo esaminato avrebbe invece un rendimento pari a:

$$\eta_C = 1 - \frac{T_A}{T_B} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \simeq 0.667,$$

chiaramente maggiore di η , in conformità col "Teorema di Carnot".

4.5.2 Esercizio (Ciclo con trasformazione lineare)

Un gas biatomico è sottoposto alla seguente trasformazione ciclica. Dapprima viene espanso attraverso una trasformazione *lineare* (cioè una trasformazione nella quale la pressione varia *linearmente* col volume) $A \rightarrow B$, che ne raddoppia il volume triplicandone la pressione ($V_B = 2V_A$, $P_B = 3P_A$); dopodiché una opportuna trasformazione isocora lo fa tornare alla pressione iniziale (P_A); infine, isobaricamente torna allo stato iniziale (A). Se ne determini il rendimento.

Svolgimento:

Nel piano (P, V) il ciclo ha la forma di un triangolo rettangolo, in cui la trasformazione *lineare* è rappresentata dall'ipotenusa, e le trasformazioni isobara ed isocora dai cateti.

Adottando lo stesso procedimento utilizzato nell'esercizio precedente, possiamo scrivere:

- B : essendo $P_B = 3P_A$, $V_B = 2V_A$, la temperatura che caratterizza lo stato B è:

$$T_B = \frac{P_B V_B}{n R} = \frac{3P_A 2V_A}{n R} = 6T_A.$$

Applicando il Primo Principio, si ha:

$$\begin{aligned} Q_{AB} &= \Delta U_{AB} + L_{AB} = \\ &= n c_V (T_B - T_A) + \frac{1}{2} (P_A + P_B)(V_B - V_A) = \\ &= \frac{5}{2} n R 5T_A + \frac{1}{2} 4P_A V_A = \\ &= \left(\frac{25}{2} + 2\right) n R T_A = \frac{29}{2} n R T_A \quad (> 0), \end{aligned}$$

dove si è determinato il lavoro compiuto dal gas nella trasformazione lineare attraverso l'area sottesa, che è quella di un trapezio rettangolo, di basi P_A e P_B ed altezza $(V_B - V_A)$.

- C : la temperatura in C risulta essere:

$$T_C = \frac{P_C V_C}{n R} = \frac{P_A 2V_A}{n R} = 2T_A,$$

per cui il calore scambiato dal gas nella trasformazione isocora è dato da:

$$\begin{aligned} Q_{BC} &= n c_V (T_C - T_B) = \frac{5}{2} n R (2T_A - 6T_A) = \\ &= -10 n R T_A \quad (< 0). \end{aligned}$$

- $C \rightarrow A$: infine, nella isobara che riporta il gas allo stato iniziale, il calore risulta essere dato da:

$$\begin{aligned} Q_{CA} &= n c_P (T_A - T_C) = \frac{7}{2} n R (T_A - 2T_A) = \\ &= -\frac{7}{2} n R T_A \quad (< 0). \end{aligned}$$

Il rendimento del ciclo, che si ottiene applicando direttamente l'eq.(4.67), è pertanto il seguente:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{BC}| + |Q_{CA}|}{Q_{AB}} = 1 - \frac{10 + \frac{7}{2}}{\frac{29}{2}} = \frac{2}{29}.$$

4.5.3 Esercizio (sull'Entropia)

Riprendendo l'esempio (3.2.2), ci chiediamo quant'è la variazione di entropia dell'Universo durante l'intero processo che porta allo stato di equilibrio il sistema all'interno del calorimetro.

Svolgimento:

Il calorimetro contenente l'acqua cede calore (al ghiaccio) con continuità, mentre si raffredda dalla temperatura iniziale T_1 a quella di equilibrio T_{eq} ; pertanto, dalla sua stessa definizione (4.52), la relativa variazione di entropia è data da:

$$\begin{aligned} \Delta S_{cal.+aq} &= (C_{cal} + c_{s(H_2O)} m_{H_2O}) \int_{T_1}^{T_{eq}} \frac{dT}{T} = \\ &= (C_{cal} + c_{s(H_2O)} m_{H_2O}) \log \left(\frac{T_{eq}}{T_1} \right) \quad (< 0). \end{aligned}$$

Nel contempo, il ghiaccio, inizialmente già alla temperatura di fusione T_{fus} ($= 0^\circ C$), assorbe la stessa quantità di calore; una prima parte viene assorbita a temperatura costante (T_{fus}) durante il passaggio di stato che lo trasforma in acqua, ed una seconda parte viene invece assorbita durante il riscaldamento continuo da T_{fus} a T_{eq} . La sua variazione di entropia sarà quindi data dalla somma di due contributi distinti:

$$\begin{aligned} \Delta S_{gh} &= \frac{\lambda_{fus} m_{gh}}{T_{fus}} + c_{s(H_2O)} m_{gh} \int_{T_{fus}}^{T_{eq}} \frac{dT}{T} = \\ &= \frac{\lambda_{fus} m_{gh}}{T_{fus}} + c_{s(H_2O)} m_{gh} \log \left(\frac{T_{eq}}{T_{fus}} \right) \quad (> 0). \end{aligned}$$

Inserendo i dati numerici si ottiene:

$$\begin{aligned}\Delta S_{cal.+aq} &= \left(0.1 \frac{kcal}{K} + 1 \frac{kcal}{kg K} \cdot 0.2 kg\right) \log \left(\frac{278.45 K}{293.15 K}\right) = \\ &= -0.0154 kcal/K = -15.4 cal/K ,\end{aligned}$$

per il calorimetro con l'acqua, e:

$$\begin{aligned}\Delta S_{gh} &= \frac{83 \frac{kcal}{kg} \cdot 0.05 kg}{273.15 K} + 1 \frac{kcal}{kg K} \cdot 0.05 kg \cdot \log \left(\frac{278.45 K}{273.15 K}\right) = \\ &= 0.0162 kcal/K = 16.2 cal/K ,\end{aligned}$$

per il ghiaccio. Poiché l'intero sistema (Calorimetro + Acqua + Ghiaccio) non scambia calore con l'ambiente esterno, la variazione totale di entropia dell'Universo è semplicemente data dalla somma di quanto abbiamo ottenuto sopra:

$$\begin{aligned}\Delta S_U &= \Delta S_{cal.+aq} + \Delta S_{gh} = \\ &= (-15.4 + 16.2) cal/K = 0.8 cal/K ,\end{aligned}$$

maggiore di zero, come previsto dal Secondo Principio!

4.5.4 Esercizio (Oscillazioni di un pistone)

Si determini il periodo delle piccole oscillazioni di un pistone di massa m che racchiude dall'alto un cilindro di sezione S contenente n moli di un gas perfetto, in equilibrio con un *bagno termico* (termostato) a temperatura T_0 .

Svolgimento:

Dal testo si evince che il cilindro è posto verticalmente nel campo gravitazionale terrestre, per cui il pistone è sottoposto, oltre alla pressione atmosferica (P_0) verso il basso e la pressione del gas (P) contenuto all'interno del cilindro verso l'alto, alla forza peso mg . Essendo S la superficie del pistone, all'equilibrio dovrà essere:

$$P S = P_0 S + mg .$$

Inoltre, dovendo valere anche l'equazione di stato dei gas perfetti: $P V_e = P S h_e = n R T_0$ (dove h_e è l'altezza del pistone all'equilibrio), si ha:

$$P = P_0 + \frac{mg}{S} = \frac{n R T_0}{S h_e} ,$$

da cui:

$$h_e = \frac{n R T_0}{P_0 S + mg} .$$

Detta quindi y la generica (non all'equilibrio) altezza del pistone, potremo porre $y = h_e + \varepsilon$. Lo studio delle piccole oscillazioni significa che siamo interessati al caso in cui $|\varepsilon| \ll h_e$. Prendendo l'asse y verso l'alto, l'equazione del moto risulta essere:

$$m\ddot{y} = P S - m g - P_0 S = \frac{nRT_0}{S y} S - m g - P_0 S.$$

Poiché $y = h_e + \varepsilon$, e quindi $\ddot{y} = \ddot{\varepsilon}$, si ottiene:

$$m\ddot{\varepsilon} = \frac{nRT_0}{h_e \left(1 + \frac{\varepsilon}{h_e}\right)} - m g - P_0 S.$$

Essendo per ipotesi $|\varepsilon| \ll h_e$, possiamo sviluppare al primo ordine il denominatore della frazione¹⁵, e scrivere, dividendo tutto per m :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{nRT_0}{m h_e^2} \cdot \varepsilon = \left(\frac{nRT_0}{m h_e} - g - \frac{P_0 S}{m} \right).$$

Questa è l'equazione *armonica* con pulsazione:

$$\omega = \frac{2\pi}{\mathcal{T}} = \frac{1}{h_e} \sqrt{\frac{nRT_0}{m}},$$

da cui otteniamo il *periodo delle piccole oscillazioni* richiesto:

$$\mathcal{T} = 2\pi \frac{\sqrt{m nRT_0}}{P_0 S + m g},$$

dove si è fatto uso dell'espressione dell'altezza di equilibrio trovata precedentemente.

4.5.5 Esercizio (sulla mongolfiera) [Univ. Pisa; Ing. (2015)]

Un pallone aerostatico (mongolfiera) è schematizzato nel seguente modo. Il pallone ha un volume V fissato. Consideriamo l'aria come un gas perfetto monoatomico. Un foro inferiore è collegato ad un carrello di massa M e volume trascurabile che porta un bruciatore in grado di mantenere la temperatura del gas all'interno del pallone uniforme e uguale a T , diversa dalla temperatura esterna T_A . La cavità permette al gas di fuoriuscire, quindi la quantità di gas interno è variabile a seconda della temperatura. La pressione dell'aria esterna P_A è uguale alla pressione interna. Il tutto è soggetto alla forza peso. Si supponga il gas all'interno del pallone sempre in *equilibrio termico* alla temperatura $T (> T_A)$.

Sapendo che la massa di una mole del gas (interno ed esterno) è μ , calcolare:

1. la massa totale m del gas (aria) all'interno del pallone;

¹⁵Ricordiamo che, al primo ordine: $(1 \pm x)^\alpha \simeq 1 \pm \alpha x$, per $|x| \ll 1$.

2. la massa massima del carrello M_{max} oltre la quale, fissato V , non sarà mai possibile sollevare la mongolfiera da terra;
3. per $M < M_{max}$, calcolare la temperatura minima T_{min} alla quale la mongolfiera si stacca da terra.

Svolgimento:

1. Per rispondere alla prima domanda è sufficiente applicare l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$\frac{P_A V}{RT} = n = \frac{m}{\mu} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{P_A V \mu}{RT},$$

da cui si ottiene anche la densità del gas interno che ci servirà per la prossima domanda:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{P_A \mu}{RT}.$$

2. Il pallone è soggetto alla forza peso $(M + m)g$ verso il basso e alla *Forza di Archimede* verso l'alto, data dal "peso dell'aria spostata", ovvero:

$$F_{Arch.} = m_{spost.} g = \rho_A V g = \frac{P_A \mu}{RT_A} V g,$$

dove si è tenuto conto che l'aria *spostata* ha la temperatura esterna T_A .

Il pallone potrà alzarsi da terra solo se la forza di Archimede sarà maggiore della forza peso: $F_{Arch.} > (M + m)g$, cioè se:

$$\frac{P_A \mu}{RT_A} V g > M g + \frac{P_A V \mu}{RT} g,$$

da cui otteniamo il risultato cercato:

$$M < M_{max} = \frac{P_A V \mu}{R} \left(\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T} \right).$$

3. Da questo stesso risultato possiamo rispondere alla terza domanda. Infatti, supposto nota la massa M del carrello (naturalmente minore di M_{max}), si trova la condizione sulla temperatura del gas interno al pallone:

$$\frac{1}{T} < \frac{1}{T_A} - \frac{MR}{P_A V \mu},$$

da cui, in definitiva:

$$T > T_{min} = \frac{T_A}{1 - \frac{MR T_A}{P_A V \mu}} \quad (> T_A).$$

4.5.6 Esercizio (sulle Macchine Termiche)

Una macchina termica *reversibile* funziona utilizzando come sorgente *fredda* l'atmosfera (a temperatura costante T_{atm}) e come sorgente *calda* un recipiente (di capacità termica nota C) contenente una massa m_{aq} di acqua, *inizialmente* alla temperatura T_0 . Si determini il lavoro che può fornire la macchina.

Svolgimento:

Poiché la macchina è reversibile, la variazione della sua entropia deve essere nulla; pertanto, detto δQ_1^m (> 0) il calore da essa assorbito dall'acqua (incluso il recipiente!) quando questa ha temperatura (variabile) T , e detto δQ_2^m (< 0) il calore che la macchina stessa cede all'atmosfera (che invece mantiene sempre la temperatura T_{atm}), possiamo scrivere che:

$$\frac{\delta Q_1^m}{T} + \frac{\delta Q_2^m}{T_{atm}} = 0.$$

Poiché ovviamente la quantità di calore δQ_1^m assorbita dalla macchina è sempre uguale a quella ceduta dall'acqua e dal contenitore (causandone una variazione di temperatura dT), dalle leggi della termologia abbiamo che:

$$\delta Q_1^m = -\delta Q_{aq} = -(C + c_{aq} m_{aq}) dT. \quad (4.68)$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione precedente troviamo quindi:

$$\delta Q_2^m = T_{atm} (C + c_{aq} m_{aq}) \frac{dT}{T}. \quad (4.69)$$

L'acqua, inizialmente a temperatura T_0 , si raffredda mano a mano che perde calore, finché non raggiunge la temperatura dell'atmosfera esterna T_{atm} ; a quel punto la macchina cessa di funzionare. La quantità di calore totale Q_2^m ceduto dalla macchina all'atmosfera si può allora ottenere integrando la (4.69):

$$\begin{aligned} Q_2^m &= T_{atm} (C + c_{aq} m_{aq}) \int_{T_0}^{T_{atm}} \frac{dT}{T} = \\ &= -T_{atm} (C + c_{aq} m_{aq}) \log \left(\frac{T_0}{T_{atm}} \right) \quad (< 0). \end{aligned}$$

D'altra parte, il calore complessivo che la macchina assorbe dall'acqua si trova integrando la (4.68):

$$Q_1^m = -Q_{aq} = -(C + c_{aq} m_{aq}) (T_{atm} - T_0) \quad (> 0).$$

Pertanto, essendo il lavoro fornito dalla macchina uguale alla somma (algebraica) dei calori scambiati con le due *sorgenti* (come suggerito dall'eq.(4.59)), si ottiene quanto richiesto:

$$\begin{aligned}
L &= Q_1^m + Q_2^m = \\
&= (C + c_{aq} m_{aq}) \left\{ (T_0 - T_{atm}) - T_{atm} \log \left(\frac{T_0}{T_{atm}} \right) \right\} = \\
&= (C + c_{aq} m_{aq}) \left\{ T_0 - T_{atm} \left[1 + \log \left(\frac{T_0}{T_{atm}} \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Naturalmente, nel caso di una macchina *irreversibile*, il risultato ottenuto sarebbe il “massimo lavoro” fornibile dalla macchina stessa.

4.5.7 Esercizio

All'interno di un recipiente con pareti impermeabili al calore sono contenuti due gas, separati da un setto fisso, pure impermeabile al calore. In particolare, siano presenti n_A moli di un gas monoatomico A a temperatura T_A nella parte di sinistra del recipiente, e n_B moli di un gas biatomico B a temperatura T_B a destra. Ad un certo istante viene praticato un foro nel setto che causa la diffusione dei due gas nell'intero recipiente. Si determini la temperatura che si raggiunge all'equilibrio.

Svolgimento:

La diffusione dei due gas all'interno del recipiente è chiaramente un processo irreversibile. L'applicazione del Primo Principio ci permette comunque di scrivere le seguenti espressioni per le rispettive variazioni di energia interna:

$$\begin{cases} \Delta U_A = \frac{3}{2} n_A R (T_{eq} - T_A) = Q_A - L_A, \\ \Delta U_B = \frac{5}{2} n_B R (T_{eq} - T_B) = Q_B - L_B, \end{cases}$$

dove si sono usate le (4.13). Sommando si ha:

$$\Delta U_A + \Delta U_B = (Q_A + Q_B) - (L_A + L_B),$$

ed essendo il sistema *globalmente isolato*, devono essere nulle entrambe le somme (algebriche) dei calori scambiati e dei lavori compiuti:

$$Q_A + Q_B = 0, \quad L_A + L_B = 0.$$

Si ottiene così:

$$\Delta U_A + \Delta U_B = 0,$$

ovvero:

$$\frac{3}{2} n_A R (T_{eq} - T_A) + \frac{5}{2} n_B R (T_{eq} - T_B) = 0,$$

da cui, in definitiva, troviamo la temperatura di equilibrio richiesta:

$$T_{eq} = \frac{3n_A T_A + 5n_B T_B}{3n_A + 5n_B}.$$

4.5.8 Esercizio

Questo esercizio è essenzialmente una variante interessante di quello precedente. Questa volta il recipiente (di sezione S e lunghezza H) è posto verticalmente nel campo di gravità terrestre, ed i due gas sono separati da un pistone mobile di massa M . Sia le pareti del recipiente che il pistone sono impermeabili al calore (hanno cioè una capacità termica trascurabile). Nella parte superiore ci sono n_A moli di un gas monoatomico A a temperatura T_A , mentre nella parte inferiore ci sono n_B moli di un gas biatomico B a temperatura T_B .

1. Si determini l'altezza h alla quale si trova il pistone nella situazione di equilibrio.
2. Se ad un certo istante viene praticato un foro nel pistone che permette ai due gas di fluire liberamente in tutto il volume, quanto sarà la temperatura dei due gas, raggiunto il nuovo equilibrio? Dove si troverà, alla fine, il pistone?

Svolgimento:

1. Sul pistone agiscono, oltre alla forza peso Mg , le forze di pressione esercitate dai due gas. In condizione di equilibrio abbiamo quindi:

$$Mg + P_A S = P_B S. \quad (4.70)$$

Le equazioni di stato per i due gas sono:

$$\begin{cases} P_A V_A = n_A R T_A, \\ P_B V_B = n_B R T_B, \end{cases} \quad (4.71)$$

dove $V_A = S(H - h)$ e $V_B = S h$ sono i rispettivi volumi.

Le eq.(4.70) e (4.71) costituiscono un sistema di tre equazioni:

$$\begin{cases} P_B = P_A + \frac{Mg}{S}, \\ P_A S(H - h) = n_A R T_A, \\ P_B S h = n_B R T_B, \end{cases} \quad (4.72)$$

la cui risoluzione ci permette di determinare sia le pressioni dei due gas P_A e P_B , che l'altezza h alla quale si trova il pistone.

2. Una volta praticato il foro nel pistone i due gas diffondono nell'intero volume $V (= SH)$, ed il pistone, per gravità, si adagia sul fondo del recipiente. Per determinare lo stato finale dei due gas possiamo applicare il *Primo Principio* all'intero sistema:

$$\Delta U_A + \Delta U_B = (Q_A + Q_B) - (L_A + L_B), \quad (4.73)$$

(come nell'esercizio precedente). Poiché le pareti del recipiente sono impermeabili al calore il sistema è *isolato*, per cui: $Q_A + Q_B = 0$. Inoltre, dal *Teorema dell'Energia Cinetica* applicato al pistone, si ha:

$$L(A \rightarrow \text{pistone}) + L(B \rightarrow \text{pistone}) + L_g = \Delta E_{cin}(\text{pistone}) = 0,$$

dove $L(A \rightarrow \text{pistone}) \equiv L_A$, $L(B \rightarrow \text{pistone}) \equiv L_B$, ed $L_g = Mgh$ è il lavoro fatto dalla forza peso. Pertanto possiamo scrivere che:

$$L_A + L_B = -Mgh.$$

Utilizzando questo risultato nell'eq.(4.73) si ottiene:

$$\begin{aligned} \Delta U_A + \Delta U_B &= \\ &= n_A c_{V(A)}(T_{eq} - T_A) + n_B c_{V(B)}(T_{eq} - T_B) = Mgh, \end{aligned}$$

da cui, in definitiva, si arriva alla temperatura finale richiesta:

$$T_{eq} = \frac{2Mgh + R(3n_A T_A + 5n_B T_B)}{R(3n_A + 5n_B)},$$

dove si sono utilizzati i valori delle capacità termiche c_V per i due gas dati nelle eq.(4.13), ed h è soluzione del sistema (4.72).

Capitolo 5

Complementi di Elettromagnetismo

5.1 Introduzione

Come è ben noto, tutte le forze esistenti in natura possono essere riconducibili a solo quattro *Interazioni Fondamentali*. Quelle che ci sono più familiari sono la forza *Gravitazionale*, dominante a grandi distanze e perciò responsabile della struttura dell'Universo su scala astronomica, e le forze *Elettromagnetiche*, essenziali per la struttura atomica e molecolare della materia, e quindi anche determinanti in tutti i processi chimici e biologici. Entrambe queste forze hanno un raggio d'azione infinito. Le altre due interazioni sono associate alle forze nucleari "Forte" e "Debole", che, pur avendo un raggio d'azione molto limitato, dell'ordine delle dimensioni di un nucleo atomico, $\mathcal{O}(10^{-13})$ cm, hanno un ruolo fondamentale su come è fatta la materia e l'intero Universo. La forza Forte è infatti responsabile dell'esistenza di protoni e neutroni (interpretati come stati legati di costituenti più elementari, i *Quark*), e rende anche possibile la presenza di nuclei (e quindi elementi) pesanti contenenti molti protoni, nonostante la forte repulsione elettrica tra di essi. La forza debole, forse meno nota, è responsabile di molti fenomeni radioattivi, e gioca un ruolo importante nei fenomeni nucleari che sono alla base della produzione di energia all'interno delle stelle. L'intensità *intrinseca* delle due forze nucleari e di quella elettromagnetica (variabili con l'energia a causa di fenomeni quantistici) risulta essere simile, entro un paio di ordini di grandezza ($F_{debole} \sim F_{em} \sim F_{forte}/100$). Questo fatto ha dato ai fisici la speranza di poter *unificare* queste tre interazioni nel contesto di una "Teoria di Grande Unificazione" (*Grand Unified Theory*, GUT). Ed in effetti, negli ultimi 40 anni sono stati proposti molti modelli, tutti basati su particolari Principi di Simmetria (associati a gruppi di simmetria, quali $SU(5)$, $SO(10)$, E_6 , etc.). D'altra parte, piuttosto misteriosamente, la gravità appare invece enormemente più debole delle altre tre forze, di almeno 40 ordini di grandezza ($F_G/F_{em} \sim 10^{-40}$). Per questo motivo, per molti anni si è ritenuto

che una vera *Unificazione* totale di tutte le forze, inclusa la gravità, potesse essere irrealizzabile. Tuttavia, lo sviluppo di nuove idee, basate sulla “Teoria delle Stringhe” e sulla possibilità di avere extra dimensioni spaziali, in aggiunta alle tre ordinarie che percepiamo normalmente, ha permesso di costruire modelli che potenzialmente potrebbero spiegare, in linea di principio, tutto ciò che ci circonda, unificando tutte le forze, una vera “Teoria del Tutto” (*Theory of Everything*, TOE).

In questo capitolo concentreremo la nostra attenzione su una soltanto delle interazioni fondamentali, quella elettromagnetica. Inizieremo presentando le analogie e le differenze tra la forza elettrostatica (di Coulomb) che si esercita tra cariche elettriche e quella gravitazionale (di Newton) presente nel caso di particelle massive. Ma prima di poterci addentrare nell’argomento riteniamo utile richiamare alcuni concetti fondamentali di *Algebra* e *Analisi* vettoriale; questo perché, come vedremo, le leggi che descrivono i fenomeni elettromagnetici assumono una forma particolarmente semplice e concisa se espresse in forma vettoriale.

5.2 Elementi di Algebra e Analisi Vettoriale

Fondamentalmente, come abbiamo già detto nel §0.2, le grandezze fisiche si distinguono in *scalari* e *vettoriali*¹. Le grandezze che risultano completamente descritte da un sol numero sono dette scalari, come la massa e l’energia. Le grandezze vettoriali, come la velocità e le forze, sono invece descritte da tre *informazioni* (intensità, direzione e verso), ovvero tre numeri. Nel presente libro rappresentiamo queste grandezze in *grassetto*² (e.g., \mathbf{v} , \mathbf{F} , etc.), per distinguerle dal loro *modulo* o *intensità* (e.g., $v = |\mathbf{v}|$, $F = |\mathbf{F}|$, etc.). Si assumono note le definizioni di base e le proprietà associative e commutativa della somma vettoriale, come pure i relativi metodi grafici, quali la “regola del parallelogramma” e della “poligonale chiusa” (o “punta-coda”). Si ricorda che per ogni vettore \mathbf{v} può essere definito il corrispondente *versore*, $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/v$, avente la stessa direzione e lo stesso verso, ma di *modulo* unitario.

Introducendo un sistema di coordinate cartesiano $O(x, y, z)$ ogni vettore \mathbf{v} nello spazio può essere *scomposto* nei suoi vettori componenti:

$$\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} + v_z \hat{\mathbf{k}}, \quad (5.1)$$

dove $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$ sono i versori diretti nelle direzioni degli assi coordinati x, y, z , rispettivamente. Le quantità scalari v_x, v_y, v_z sono dette *le componenti* del vettore \mathbf{v} nel suddetto sistema cartesiano. Dal teorema di Pitagora si trova che l’intensità di \mathbf{v} è data da:

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (5.2)$$

¹Esistono tuttavia anche grandezze più complesse, dette *tensoriali*.

²In alcuni testi viene invece utilizzata una *freccia* sopra la lettera che le caratterizza (e.g., \vec{v} , \vec{F} , etc.).

Il vettore ottenuto moltiplicando un vettore \mathbf{v} per uno scalare λ è semplicemente un vettore le cui componenti sono tutte moltiplicate per questo fattore³:

$$\mathbf{w} = \lambda \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad w_i = \lambda v_i, \quad (\forall i = x, y, z). \quad (5.3)$$

La somma di due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} è invece un vettore che ha per componenti la somma delle rispettive componenti:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad w_i = u_i + v_i, \quad (\forall i = x, y, z). \quad (5.4)$$

È possibile moltiplicare tra loro i vettori in due modi distinti. Il cosiddetto “prodotto scalare” tra due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} è definito come:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = uv \cos \alpha \equiv u v_u \equiv v u_v \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \quad (5.5)$$

($\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ si legge “ \mathbf{u} scalar \mathbf{v} ”), essendo α l’angolo tra essi compreso, e dove v_u e u_v sono le proiezioni di \mathbf{v} su \mathbf{u} e di \mathbf{u} su \mathbf{v} , rispettivamente. Ne segue che $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ è positivo se l’angolo α è acuto ($< \pi/2$), è negativo se α è ottuso ($> \pi/2$), ed è infine nullo se i due vettori sono perpendicolari tra loro ($\alpha = \pi/2$). L’ortogonalità degli assi cartesiani (secondo cui $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1$, e $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$) ci permette di esprimere il prodotto scalare tra due vettori in termini delle rispettive componenti:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_x \hat{\mathbf{i}} + u_y \hat{\mathbf{j}} + u_z \hat{\mathbf{k}}) \cdot (v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} + v_z \hat{\mathbf{k}}) = \\ &= u_x v_x \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} + u_x v_y \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} + \dots + u_z v_y \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{j}} + u_z v_z \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \Rightarrow \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z.$$

Un secondo modo di moltiplicare tra loro due vettori è attraverso il cosiddetto “prodotto vettoriale”, definito come segue: dati due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} , il loro prodotto vettoriale dà come risultato un vettore (\mathbf{w}), diretto perpendicolarmente al piano da essi individuato (ben definito nel caso in cui i due vettori non siano paralleli o antiparalleli) e di modulo dato da:

$$|\mathbf{w}| \equiv w = uv \sin \alpha; \quad (5.7)$$

il verso è infine determinato dalla cosiddetta “regola della mano destra”, secondo la quale questo coincide col verso del pollice, quando si ponga la mano (destra) *di taglio*⁴ sopra il primo fattore (diciamo \mathbf{u}), in modo da raggiungere il secondo (\mathbf{v}) con la minor rotazione possibile della mano stessa. Tale prodotto viene indicato con $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ (si legge “ \mathbf{u} vettor \mathbf{v} ”), e dalla sua stessa definizione risulta evidentemente essere antisimmetrico: $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$. Un modo conveniente

³In algebra vettoriale (e tensoriale) è spesso conveniente utilizzare equazioni in cui le varie componenti sono rappresentate da opportuni “indici”: $1 \equiv x, 2 \equiv y, 3 \equiv z$.

⁴cioè, perpendicolarmente al piano contenente i due vettori dati.

di esprimere il prodotto vettoriale tra due vettori, quando se ne conoscano le componenti cartesiane, è attraverso il seguente determinante:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \\ &= \hat{\mathbf{i}}(u_y v_z - u_z v_y) + \hat{\mathbf{j}}(u_z v_x - u_x v_z) + \hat{\mathbf{k}}(u_x v_y - u_y v_x). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Naturalmente $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = 0$ se i vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} sono paralleli (o antiparalleli). Talvolta sono pure utili i seguenti risultati notevoli:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}), \quad (5.9)$$

(proprietà simmetrica del “prodotto triplo-misto” per permutazione ciclica), e:

$$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{w}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}), \quad (5.10)$$

(formula del “doppio prodotto vettoriale”).

Spesso nei problemi di elettromagnetismo i sistemi fisici, per esempio distribuzioni spaziali di cariche o correnti elettriche, presentano simmetrie assiali o sferiche. In questi casi risulta più conveniente utilizzare coordinate “cilindriche” (ρ, ϕ, z) o “sferiche” (r, θ, ϕ) , anziché quelle cartesiane. Quelle cilindriche sono essenzialmente l'estensione tridimensionale delle comuni coordinate polari piane, e sono legate alle coordinate cartesiane dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \phi = \arctan \frac{y}{x}, \\ z = z \end{cases} \quad (5.11)$$

(con $\phi \in [0, 2\pi]$), le cui formule inverse sono:

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z. \quad (5.12)$$

In questo sistema di coordinate l'elemento infinitesimo di volume si scrive:

$$dV = \rho d\rho d\phi dz, \quad (5.13)$$

(essendo uguale a ρ lo Jacobiano della trasformazione da coordinate cartesiane a cilindriche). Le coordinate sferiche sono invece definite dalle seguenti formule:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta = \arccos \frac{z}{r} \equiv \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \phi = \arctan \frac{y}{x}, \end{cases} \quad (5.14)$$

(con $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi]$), invertendo le quali si ottiene:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta. \quad (5.15)$$

L'elemento infinitesimo di superficie sferica (cioè, con $r = \text{costante}$) è dato da:

$$dS = r^2 d\Omega = r^2 \sin \theta d\theta d\phi, \quad (5.16)$$

dove $d\Omega$ è detto elemento infinitesimo di *angolo solido*; l'angolo solido *totale* (analogo al 2π dell'angolo piano) è uguale a 4π (infatti, $\oint d\Omega = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2 \cdot 2\pi = 4\pi$). L'elemento infinitesimo di volume si scrive quindi:

$$dV = dr dS = r^2 dr d\Omega = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (5.17)$$

(infatti, in questo caso lo Jacobiano della trasformazione è uguale a $|J| = r^2 \sin \theta$); naturalmente, la sua integrazione (in r tra 0 e R , in θ da 0 a π e in ϕ tra 0 e 2π), riproduce la nota formula del volume di una sfera di raggio R : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Uno dei concetti fondamentali per lo studio dell'elettromagnetismo, ma dovremmo dire per lo studio di gran parte della Fisica Moderna, è quello di "*Campo*". Un *Campo Scalare* è semplicemente una funzione $\Psi(\mathbf{r}) \equiv \Psi(x, y, z)$ definita in ogni punto P (di raggio vettore $\vec{OP} \equiv \mathbf{r}$) dello spazio. Analogamente, un *Campo Vettoriale* $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ può essere definito attraverso le sue componenti cartesiane:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{i}} E_x(x, y, z) + \hat{\mathbf{j}} E_y(x, y, z) + \hat{\mathbf{k}} E_z(x, y, z). \quad (5.18)$$

Da un punto di vista matematico, quindi, un campo scalare è una funzione $\Psi : \mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}$, mentre un campo vettoriale è una funzione $\mathbf{E} : \mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}^3$. Possiamo dare una conveniente rappresentazione grafica di un Campo Vettoriale attraverso le sue *linee di forza* (dette anche *linee di campo*), cioè quelle curve che sono tangenti al vettore del campo in ogni punto.

In particolar modo per l'elettrostatica, giocherà un ruolo importante il concetto di "*flusso*" di un campo vettoriale attraverso una qualche superficie S , definito come:

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (5.19)$$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore normale alla superficie in ogni suo punto P . Se poi la superficie S è chiusa, diremo che:

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (5.20)$$

rappresenta il flusso *netto* di \mathbf{E} uscente dal volume V racchiuso dalla superficie S ($\partial V = S$).

Altro concetto importante, derivato dalla stessa definizione di *lavoro* compiuto da una forza, data in eq.(2.66), è quello di *integrale di linea* da A a B di un vettore \mathbf{E} lungo una qualche curva γ , definito come:

$$\mathcal{L}_\gamma(\mathbf{E}; A \rightarrow B) = \int_{A_\gamma}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (5.21)$$

essendo $d\mathbf{l}$ il vettore dello spostamento infinitesimo tangente alla curva γ in ogni suo punto. Come già detto nel §2.6.1, ricordiamo che in generale, per le Forze (o Campi Vettoriali) *Non-Conservative*, il lavoro (l'integrale) così definito dipende esplicitamente dal particolare percorso (curva) γ effettuato da A a B . Tuttavia, nel caso di Forze (Campi) *Conservative*, l'integrale (5.21) dipende esclusivamente dai punti iniziale A e finale B , e non da γ . Se la curva γ è chiusa ($\partial\gamma = \emptyset$), l'integrale

$$\mathcal{C}_\gamma(\mathbf{E}) = \oint_\gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (5.22)$$

è detto *circuitazione* del vettore \mathbf{E} lungo γ . Per quanto detto sopra, quindi, la *circuitazione* di un Campo Vettoriale (o Forza) *Conservativo* è sempre nulla, indipendentemente dalla scelta della curva γ .

A questo punto è utile estendere ai campi scalari e vettoriali il concetto di *derivata*. A tal fine è conveniente introdurre il cosiddetto *simbolo "nabla"*: ∇ , che in coordinate cartesiane è definito come:

$$\nabla = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (5.23)$$

Questo *operatore* differenziale assume significati diversi a seconda di come viene applicato. Quando ∇ agisce su un Campo Scalare Ψ , il risultato che si ottiene è un campo vettoriale che viene detto *gradiente* di Ψ :

$$\nabla\Psi \equiv \text{grad } \Psi = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial\Psi}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial\Psi}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial\Psi}{\partial z}. \quad (5.24)$$

Questo vettore ha la notevole proprietà di essere diretto, in ogni punto dello spazio, nella direzione e verso di massimo aumento della funzione Ψ , ed il suo modulo è proprio uguale alla derivata di Ψ in tale direzione. Di conseguenza, le *Superfici di Livello* di Ψ , (cioè le superfici ove $\Psi(x, y, z)$ è costante) sono in ogni punto perpendicolari al vettore $\nabla\Psi$. Per esempio, in elettrostatica le superfici *equipotenziali* ($V = \text{costante}$) sono ovunque perpendicolari al vettore campo elettrico \mathbf{E} .

Altra applicazione dell'operatore *nabla* si ottiene *moltiplicandolo* scalarmente per un vettore (cioè, un campo vettoriale); in tal caso si parla di *divergenza* del vettore stesso, ed il risultato è evidentemente un campo scalare:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \equiv \text{div } \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad (5.25)$$

il cui significato può essere chiarito attraverso il "Teorema della divergenza". Questo teorema afferma che *il flusso netto di un campo vettoriale \mathbf{E} attraverso una generica superficie chiusa S , è sempre uguale all'integrale esteso al volume V racchiuso da S della divergenza dello stesso campo vettoriale*; in formula:

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV. \quad (5.26)$$

Ciò suggerisce, infatti, che:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} \equiv \nabla \cdot \mathbf{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi(\mathbf{E})}{\Delta V}; \quad (5.27)$$

in altre parole, la divergenza di un campo vettoriale è in ogni punto uguale al limite a cui tendono i rapporti tra il suo flusso attraverso superfici centrate nel punto stesso ed il volume da esse racchiuso, per volumi sempre più piccoli. Di conseguenza, questa quantità potrà essere diversa da zero solo nei punti in cui siano presenti *sorgenti* dello stesso campo vettoriale. Per esempio, la divergenza del campo elettrico, come vedremo, è ovunque proporzionale alla locale densità di carica elettrica. Corollario del Teorema della divergenza (eq.(5.26)) è il fatto che, se un campo \mathbf{E} ha divergenza identicamente nulla ($\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$), allora anche il suo flusso uscente da una *qualsiasi* superficie chiusa S è nullo; ciò ha due implicazioni: (1) “le sue linee di campo sono *sempre* chiuse”, e (2) “le sue *sorgenti* non esistono isolate”; tali campi sono detti *solenoidali*. Un tipico esempio è fornito proprio dal Campo Magnetico: le sue linee di forza sono chiuse e, come è noto, non è possibile in alcun modo isolare i due poli (nord e sud) di un magnete.

È anche possibile *moltiplicare* “vettorialmente” l’operatore ∇ per un campo vettoriale \mathbf{E} ; il risultato, detto *rotore* di \mathbf{E} , si ottiene applicando l’eq.(5.8) ed è quindi dato da:

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{E} \equiv \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \\ &= \hat{\mathbf{i}} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{j}} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \hat{\mathbf{k}} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Il suo significato può essere chiarito da un altro importante teorema di Analisi Vettoriale, il “Teorema di Stokes”, secondo il quale *la circuitazione di un campo \mathbf{E} su una curva chiusa γ è uguale al flusso del suo “rotore” attraverso una qualsiasi delle possibili superfici S che hanno questo stesso contorno (cioè, tali che $\partial S = \gamma$):*

$$\mathcal{C}_\gamma(\mathbf{E}) = \oint_\gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \wedge \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (\forall S \mid \partial S = \gamma). \quad (5.29)$$

Ciò significa che, in ogni punto, la componente del *rotore* di un vettore nella generica direzione $\hat{\mathbf{n}}$ è data dal limite a cui tendono i rapporti tra la circuitazione del vettore stesso su contorni γ sempre più piccoli e la superficie S (di versore $\hat{\mathbf{n}}$) che essi racchiudono; in formula, potremo cioè scrivere che:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(P) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathcal{C}_\gamma(\mathbf{E})}{\Delta S}. \quad (5.30)$$

Il Teorema di Stokes (eq.(5.29)) implica che tutti i campi *conservativi*, per i quali le circuitazioni sono sempre nulle, siano necessariamente anche *irrotazionali*, ovvero caratterizzati da un *rotore* identicamente uguale a zero:

$$\mathbf{E} \text{ "conservativo"} \iff \nabla \wedge \mathbf{E} = 0. \quad (5.31)$$

Dalle stesse proprietà del prodotto vettoriale ($\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = 0$) si evince quindi che, per ogni arbitrario campo scalare ϕ , si abbia:

$$\nabla \wedge (\nabla \phi) = 0, \quad (5.32)$$

per cui ogni campo conservativo (e quindi irrotazionale) \mathbf{E} può sempre essere espresso come gradiente di un opportuno campo scalare ϕ , spesso detto (a meno del segno) suo *"potenziale"*:

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = 0 \implies \mathbf{E} = (-)\nabla \phi. \quad (5.33)$$

In meccanica⁵, infatti, se \mathbf{F} è una forza conservativa, il lavoro da essa compiuto nello spostamento da A a B di un punto materiale può essere scritto come (*meno*) la variazione dell'energia potenziale U ad essa associata:

$$L_F(A \rightarrow B) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -\Delta U \equiv -[U(B) - U(A)]. \quad (5.34)$$

La sua formula *inversa* ci riporta in effetti alla:

$$\mathbf{F} = -\nabla U. \quad (5.35)$$

La perpendicolarità tra il prodotto vettoriale di due vettori e ciascuno dei suoi fattori ($\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 0$), implica anche che, per qualsiasi campo vettoriale \mathbf{A} , sia:

$$\nabla \cdot \nabla \wedge \mathbf{A} = 0. \quad (5.36)$$

Ciò significa che ogni campo *solenoidale*, cioè a divergenza nulla, può sempre essere espresso come *rotore* di un opportuno campo vettoriale. Il campo Magnetico \mathbf{B} , per esempio, può infatti essere scritto come:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \implies \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}, \quad (5.37)$$

dove \mathbf{A} è detto "Potenziale Vettore".

Ultima applicazione dell'operatore *nabla* di cui faremo uso è l'operatore *Laplaciano*, definito come prodotto scalare di due ∇ :

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (5.38)$$

⁵Qui, riportiamo alcuni dei risultati già esposti nel §2.6.1.

che può essere applicato sia a campi scalari che vettoriali.

Gli elementi di algebra e analisi vettoriale che abbiamo dato qui costituiscono i principali strumenti matematici che utilizzeremo nel presente capitolo per la nostra breve trattazione dell'elettromagnetismo.

5.3 Forza di Coulomb e Forza di Newton: analogie e differenze

Come si è detto nel §5.1, tutta la materia dell'Universo è essenzialmente costituita da particelle: protoni, neutroni (o meglio, *quarks*), elettroni, neutrini, *etc.*, in interazione tra loro attraverso una o più interazioni fondamentali⁶. La caratteristica di ciascuna particella che quantifica la capacità di interagire attraverso una determinata interazione fondamentale è genericamente detta “*carica*”; all'interazione elettromagnetica è associata la familiare *carica elettrica*, a quella gravitazione è associata la *massa*⁷, alla Forza Forte la cosiddetta *carica di colore* ed infine a quella Debole la *carica di isospin*. In particolare tra la Forza Gravitazionale e quella Elettrica esistono strette analogie. Come si è visto più volte nel cap.2, ed in particolare nel §2.9, la forza di attrazione che si esercita tra due corpi massivi posti ad una certa distanza r è data dalla Legge di Newton della Gravitazione Universale:

$$F_G = -G_N \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (5.39)$$

dove $G_N \simeq 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ è una costante universale della natura.

Per gli sviluppi futuri, risulta conveniente introdurre il concetto di *Campo di Forza*. Questo è un campo vettoriale, definito in tutti i punti dello spazio come “la forza che si eserciterebbe in tal punto sulla relativa unità di carica”. Questo significa, per esempio, che una massa M posta nell'origine delle coordinate genera in un generico punto P (di raggio vettore $\vec{OP} = \mathbf{r}$) un *Campo Gravitazionale* \mathbf{G} dato dalla:

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = -G_N \frac{M}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \equiv -G_N \frac{M}{r^3} \mathbf{r}, \quad (5.40)$$

dove si è tenuto conto della (5.39).

Le principali proprietà di questo *campo* possono essere riassunte nei seguenti punti:

- La *carica* ad esso associata, cioè la “*massa*”, è una quantità *conservata*⁸; inoltre, il fatto che questa non possa essere negativa, implica che la gravità sia sempre solo attrattiva.

⁶Nel contesto della moderna “Teoria dei Campi” esistono tuttavia anche altre interazioni, per esempio quelle associate al *Bosone di Higgs*, responsabili della massa delle particelle stesse.

⁷In realtà, secondo la teoria della Relatività Generale, la *carica gravitazionale* non è semplicemente la massa della particella, ma una grandezza più complessa, costruita dalla sua Energia e dal suo Impulso, il cosiddetto *Tensore Energia-Impulso*; restando tuttavia nel contesto della Fisica Classica, possiamo ignorare questo fatto.

⁸In realtà, come precisato nella *Nota 7*, è l'Energia ad essere conservata esattamente!

- Il campo \mathbf{G} soddisfa il “Teorema di Gauss”, secondo il quale *il flusso netto del (vettore del) campo uscente da una qualsiasi superficie chiusa S è direttamente proporzionale alla carica (massa) totale contenuta in essa*. Come vedremo nel §5.5, questo teorema avrà notevoli applicazioni, proprio in Elettrostatica. La validità di questo teorema, sia nel caso del campo gravitazionale che di quello elettrico, è dovuta alla “*proporzionalità quadratica inversa*” con la distanza presente nelle eq.(5.39) e (5.40).
- Soddisfa inoltre il cosiddetto “Principio di Sovrapposizione”, secondo il quale *il campo generato in un punto dello spazio da più sorgenti è semplicemente la somma (vettoriale) dei singoli campi*; la validità di questo principio è dovuta alla *linearità* del campo gravitazionale (come pure di quello elettrico) rispetto alle sue sorgenti (masse o cariche elettriche che siano).
- Infine, il campo \mathbf{G} (come pure il campo elettrico-statico, o “elettrostatico”, \mathbf{E}) è un campo *Conservativo*, poiché il lavoro da esso compiuto nello spostamento di una particella da un punto A ad un punto B , non dipende dal particolare percorso effettuato, ma solo da questi punti estremi. In tal caso, il campo stesso \mathbf{G} può essere scritto come nell’eq.(5.33): $\mathbf{G} = -\nabla\phi_G$, essendo ϕ_G il *potenziale gravitazionale*.

Come si è già detto, la forza elettrica presenta forti analogie con quella gravitazionale. Infatti, la forza che si esercita tra due cariche elettriche puntiformi q_1 e q_2 poste (nel *vuoto*) ad una distanza r è descritta dalla cosiddetta *Legge di Coulomb*, del tutto simile a quella di Newton (5.39):

$$F_C = K_0 \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (5.41)$$

dove K_0 è la *costante di Coulomb*, spesso espressa in termini della “costante dielettrica del vuoto” $\epsilon_0 \simeq 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$:

$$K_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2. \quad (5.42)$$

Si ricorda⁹ che nel *Sistema Internazionale (S.I.)* l’unità di misura della carica elettrica è il *Coulomb*. Se le cariche elettriche sono immerse in un mezzo diverso dal *vuoto*, la forza elettrica tra di esse risulta ridotta di un fattore numerico che dipende dal mezzo stesso; questo fattore (ϵ_r) è detto “costante dielettrica relativa”, e permette di definire la costante di Coulomb in un generico mezzo come segue:

$$K = \frac{K_0}{\epsilon_r} = \frac{1}{4\pi\epsilon}, \quad (5.43)$$

dove $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ è detta *costante dielettrica* del mezzo considerato; in acqua, per esempio, $\epsilon_r \simeq 80$, per cui la forza di Coulomb risulta ridotta di circa 80 volte quando le cariche, a parità di distanza, sono immerse in questo mezzo.

⁹Vedi la tabella riportata nel §0.2.

Poiché la forma della forza di Coulomb (eq.(5.41)) è simile a quella della Gravitazione Universale (eq.(5.39)), non sorprende che il campo elettrico \mathbf{E} associato alla prima abbia essenzialmente le stesse proprietà del campo \mathbf{G} . L'unica importante differenza è che la forza di Coulomb può essere sia attrattiva che repulsiva, in conseguenza del fatto che le cariche elettriche, contrariamente alle masse delle particelle, possono essere sia negative che positive; in particolare, cariche dello stesso segno si respingono, mentre cariche di segno opposto si attraggono. Altra differenza tra le due interazioni è che, mentre la carica elettrica risulta essere *quantizzata*, visto che tutte le cariche sono multipli di una carica *elementare* e ($\simeq 1.6 \cdot 10^{-19} C$), uguale alla carica dell'elettrone¹⁰, le masse (per quanto ne sappiamo!) possono assumere qualsiasi valore. Tuttavia, la differenza più sostanziale consiste senz'altro nella diversa intensità *intrinseca* delle due forze. Per rendersi conto di questo fatto è sufficiente calcolare il rapporto tra la forza elettrica e quella gravitazionale che si esercitano il protone e l'elettrone nell'atomo di idrogeno:

$$\frac{F_C}{F_G} = \frac{K_0 e^2}{G_N m_e m_p} \sim 10^{40}, \quad (5.44)$$

un numero incredibilmente enorme! Come già accennato nel §5.1, le teorie più recenti basate sulle *stringhe* e le *extra-dimensioni*, tentano di risolvere questo mistero, cercando una spiegazione per la piccolezza della costante di Newton G_N .

5.4 Il Campo Elettrico

Ingredienti fondamentali per lo studio dell'Elettromagnetismo sono, ovviamente, il campo Elettrico \mathbf{E} e quello Magnetico \mathbf{B} . Qui introdurremo il primo, lasciando la trattazione del secondo al §5.9. Il concetto di *Campo* fu introdotto per la prima volta da Faraday nel XIX secolo, e da allora ha giocato un ruolo sempre più importante nello sviluppo della Fisica Moderna. Precisando ulteriormente quanto già detto precedentemente a proposito del campo gravitazionale \mathbf{G} , potremmo definire “campo in un punto dello spazio come una specie di *forza potenziale*, cioè una forza che si eserciterebbe su un'eventuale carica di prova *unitaria*, qualora fosse posta in quel punto”. Nel caso specifico del campo elettrico, per esempio, potremmo dire che la presenza stessa di cariche elettriche *modifica* le proprietà fisiche dello spazio circostante, generando in ogni punto una forza *potenziale*, che diventa *attuale* solo nel caso in cui nel punto stesso si ponga effettivamente una carica. Operativamente, possiamo quindi definire il campo elettrico \mathbf{E} in un generico punto P dello spazio come:

$$\mathbf{E}(P) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_C(P; q)}{q}, \quad (5.45)$$

¹⁰in realtà, si tratta di multipli di una frazione di e , visto che i *quark* hanno carica $+\frac{2}{3}e$ e $-\frac{1}{3}e$.

uguale cioè al limite a cui tende il rapporto tra la forza elettrica esercitata su una carica elettrica q posta in P e la carica stessa, per cariche sempre più piccole¹¹. L'esempio più semplice è il campo elettrico in un punto P di raggio vettore $\vec{OP} = \mathbf{r}$, generato da una carica elettrica puntiforme Q posta nell'origine delle coordinate:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (5.46)$$

La sua generalizzazione al caso in cui si abbiano più cariche puntiformi Q_i ($i = 1, \dots, n$) poste in punti P_i (di raggi vettore $\vec{OP}_i = \mathbf{r}_i$) è immediata:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (5.47)$$

dove $\mathbf{r} = \vec{OP}$.

5.4.1 Esercizio

Siano date le seguenti due cariche puntiformi nel piano: $Q_1 = -2 \cdot 10^{-6} C$ in $P_1(2; 1) m$, e $Q_2 = 3 \cdot 10^{-6} C$ in $P_2(1; 5) m$. Si determini il vettore campo elettrico \mathbf{E} risultante nel punto $P(4; 0) m$ (la sua espressione vettoriale, la sua intensità e l'angolo polare da esso formato con l'asse delle ascisse).

Svolgimento:

Preliminarmente, dai raggi vettori del punto P e dei punti sorgente P_1 e P_2 , troviamo: $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = (2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}) m$ e $\mathbf{r} - \mathbf{r}_2 = (3\hat{\mathbf{i}} - 5\hat{\mathbf{j}}) m$, i cui moduli sono quindi: $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = \sqrt{5} m$ e $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = \sqrt{34} m$, rispettivamente. Applicando l'eq.(5.47) e scrivendo separatamente i campi generati dalle due cariche in P , si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) &= \frac{K_0 q_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = \\ &= \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-2 \cdot 10^{-6})}{5\sqrt{5}} (2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}) N/C = \\ &= (-3.22\hat{\mathbf{i}} + 1.61\hat{\mathbf{j}}) \cdot 10^3 N/C, \end{aligned}$$

ed

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) &= \frac{K_0 q_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) = \\ &= \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-6}}{34\sqrt{34}} (3\hat{\mathbf{i}} - 5\hat{\mathbf{j}}) N/C = \\ &= (0.41\hat{\mathbf{i}} - 0.68\hat{\mathbf{j}}) \cdot 10^3 N/C, \end{aligned}$$

¹¹La necessità di prendere il *limite* è dovuta al fatto che la carica non deve *modificare* il campo originario \mathbf{E} che vogliamo definire in P .

la cui somma fornisce il vettore campo elettrico in P richiesto:

$$\mathbf{E}(P) = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = (-2.81 \hat{\mathbf{i}} + 0.93 \hat{\mathbf{j}}) \cdot 10^3 \text{ N/C}.$$

La sua intensità è $E(P) = 2.96 \cdot 10^3 \text{ N/C}$ e l'angolo polare da esso formato con l'asse delle x è dato da:

$$\theta = \arctan\left(\frac{E_y}{E_x}\right) = \arctan\left(\frac{0.93}{-2.81}\right) \simeq 162^\circ.$$

5.4.2 Il Potenziale elettrico

Come si è visto, il campo Elettrico \mathbf{E} (nel caso *stazionario* in cui tutte le cariche sono in quiete) è conservativo, per cui valgono le eq.(5.33). La differenza di potenziale (*d.d.p.*) tra due punti A e B è quindi definita come:

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad \Rightarrow \quad V_{AB} \equiv V(A) - V(B) = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (5.48)$$

Nel *S.I.* la sua unità di misura è il *Volt*: $V (\equiv \text{N/C})$. Nel caso in cui si abbia una singola carica elettrica nell'origine, con il campo elettrico dato dall'eq.(5.46), la differenza di potenziale risulta essere data da:

$$V(\mathbf{r}_A) - V(\mathbf{r}_B) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_B^A \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right). \quad (5.49)$$

Essendo sempre definito a meno di una costante additiva arbitraria, possiamo porre uguale a zero il potenziale all'infinito ($\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$), cosicché $V(\mathbf{r})$ nel caso di una carica Q posta nell'origine si può scrivere:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (5.50)$$

che si può di nuovo generalizzare al caso in cui si abbiano più cariche puntiformi, ottenendo:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}. \quad (5.51)$$

Se le distribuzioni di carica sono continue, possiamo estendere i risultati precedenti (eq.(5.47) e (5.51)), introducendo il concetto di *densità di carica* elettrica; solitamente si definiscono $\rho = dQ/dv$, $\sigma = dQ/dS$ e $\lambda = dQ/dl$, le densità di carica volumica, superficiale, e lineare, rispettivamente. Nel primo caso, per esempio, il campo elettrico in un generico punto si calcolerebbe attraverso il seguente integrale:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv', \quad (5.52)$$

esteso a tutto lo spazio v in cui è presente una densità di carica ρ , e dove l'elemento infinitesimo di volume è:

$$dv' = d^3\mathbf{r}' \equiv dx' dy' dz' .$$

Osservando che:

$$\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) , \quad (5.53)$$

e tenendo conto del fatto che l'operatore $\nabla \equiv \frac{d}{d\mathbf{r}}$ coinvolge \mathbf{r} ma non \mathbf{r}' , possiamo scrivere l'eq.(5.52) come:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int_v \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' , \quad (5.54)$$

da cui segue che il potenziale $V(\mathbf{r})$ può esprimersi in questo caso come:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' , \quad (5.55)$$

con $\mathbf{E} = -\nabla V$.

5.5 Teorema di Gauss e sue applicazioni

Come già detto, il Teorema di Gauss è uno dei teoremi fondamentali dell'elettrostatica. Esso afferma che il flusso netto uscente del vettore campo elettrico \mathbf{E} da una qualsiasi superficie chiusa S , definito nell'eq.(5.20), è uguale alla somma algebrica delle cariche elettriche contenute al suo interno, divisa per la costante dielettrica ϵ_0 (ovvero ϵ , nel caso in cui il mezzo sia diverso dal vuoto):

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i , \quad (5.56)$$

dove la somma è estesa a tutte le cariche contenute all'interno di S . Nel caso di una distribuzione continua di carica di densità $\rho(\mathbf{r})$, il teorema della divergenza (5.26) ci permette di esprimere la (5.56) nella forma:

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_v \nabla \cdot \mathbf{E} dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho dv , \quad (5.57)$$

da cui, per l'arbitrarietà del volume v sul quale si integra, si arriva al seguente risultato:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \equiv \text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} . \quad (5.58)$$

Questa formula è nota come "Prima equazione di Maxwell". Essa ci conferma il significato da dare alla "divergenza" di un campo vettoriale, ovvero di essere in ogni punto proporzionale alle sue sorgenti. Ricordandoci la relazione (5.48) tra \mathbf{E} e V , l'eq.(5.58) ci permette anche di ottenere l'equazione, detta di Poisson,

che deve essere soddisfatta dal potenziale elettrico in conseguenza del teorema di Gauss:

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (5.59)$$

essendo Δ l'operatore *Laplaciano* definito nell'eq.(5.38).

Anche se il teorema (5.56) ha validità generale, nel senso che è vero per una qualsiasi distribuzione spaziale di carica, esso è tuttavia utile alla determinazione del campo elettrico, *solo* nel caso in cui il sistema presenti una simmetria tale da farci intuire come è diretto \mathbf{E} in ogni punto, pur senza conoscerne ancora l'intensità. In tali situazioni, il teorema si applica introducendo particolari superfici chiuse (*astratte-matematiche*), dette *superfici di Gauss*, tante quante sono le regioni distinte di spazio in cui va determinato il campo \mathbf{E} , scelte in modo tale che sia particolarmente semplice il calcolo del flusso attraverso di esse, proprio tenendo conto della simmetria del sistema. Tipicamente, per sistemi a simmetria *sferica* le superfici di Gauss sono sfere, mentre se è presente una simmetria *assiale* si introducono opportune superfici cilindriche. Poiché in tutti i testi vengono già trattati, a titolo illustrativo del Teorema, i classici *esercizi* della sfera, del filo, e del piano uniformemente carichi, qui abbiamo preferito darne esempi diversi.

5.5.1 Esempio 1: Campo elettrico per un cavo coassiale

Come primo esempio, vogliamo determinare il campo elettrico in tutto lo spazio generato da un *cavo* cilindrico infinitamente lungo di raggio R e densità di carica variabile con la distanza radiale secondo la legge: $\rho(r) = k e^{-r/R}$ (con $r \leq R$), sul cui asse (coincidente con l'asse z) c'è un sottile filo uniformemente carico, con densità di carica lineare λ tale da rendere il sistema globalmente neutro.

Considerando un tratto di cavo lungo dz , e utilizzando la formula (5.13) per l'elemento infinitesimo di volume in coordinate cilindriche, la condizione di *neutralità* elettrica ci permette di determinare la densità lineare λ del filo centrale:

$$\lambda dz = - \int_0^R \rho(r) r dr dz \int_0^{2\pi} d\phi,$$

da cui:

$$\lambda = -2\pi k \int_0^R r e^{-r/R} dr = -2\pi k R^2 \left(1 - \frac{2}{e}\right).$$

Esistono due regioni distinte di spazio in questo problema, *interna* ($r \leq R$) ed *esterna* ($r \geq R$), nelle quali, data la simmetria assiale, il campo elettrico da determinare è diretto radialmente e la sua intensità non può che dipendere dalla distanza r dall'asse z , (cioè, $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{r}} E(r)$). Si introducono pertanto due superfici di Gauss cilindriche, lunghe h , coassiali al cavo, una (interna, S_{int}) di raggio r minore di R , ed una (esterna, S_{ext}) di raggio r maggiore di R .

Poiché la prima racchiude solo parte del cavo, l'applicazione dell'eq.(5.56) porta al seguente risultato:

$$\Phi_{S_{int}}(\mathbf{E}) = \oint_{S_{int}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = E(r) 2\pi r h = \frac{Q_{int}(r)}{\epsilon_0}, \quad (5.60)$$

dove la carica interna a S_{int} risulta essere data dalla seguente formula:

$$\begin{aligned} Q_{int} &= h \left(\lambda + \int_0^r \rho(r') 2\pi r' dr' \right) = \dots = \\ &= 2\pi k R^2 \left\{ \frac{2}{e} - \left(1 + \frac{r}{R} \right) e^{-r/R} \right\}, \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto del valore di λ ottenuto precedentemente. Sostituendo quindi nell'eq.(5.60) si arriva alla seguente espressione per il campo elettrico interno al cavo:

$$E(r) = \frac{k R^2}{\epsilon_0 r} \left\{ \frac{2}{e} - \left(1 + \frac{r}{R} \right) e^{-r/R} \right\}, \quad (r \leq R).$$

D'altra parte, l'applicazione del teorema alla superficie S_{ext} dà banalmente un campo esterno identicamente nullo, poiché è nulla la carica elettrica totale contenuta al suo interno.

5.5.2 Esempio 2: Campo elettrico per un atomo di idrogeno

In questo secondo esempio vogliamo calcolare il campo elettrico, a simmetria sferica, generato dal protone e dalla *nuvola* elettronica di un atomo di idrogeno in cui l'elettrone si trova nello stato fondamentale. In questa ipotesi, possiamo considerare il protone centrale (di carica $+e$) puntiforme e l'elettrone *diffuso* nel suo *orbitale* con una densità di carica¹² data da: $\rho_e(r) = k e^{-2r/a_0}$, essendo $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(m_e e^2) \simeq 0.53 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ il "raggio di Bohr" dell'atomo di idrogeno. La costante di proporzionalità (k) può essere ottenuta imponendo che la carica elettrica totale dell'orbitale riproduca interamente quella dell'elettrone; sfruttando la formula (5.17) per l'elemento infinitesimo di volume in coordinate sferiche si deve quindi avere:

$$\begin{aligned} -e &= \int_v \rho_e(\mathbf{r}) dv = k \int_0^\infty e^{-2r/a_0} r^2 dr \underbrace{\oint d\Omega}_{4\pi} \\ &= \pi k a_0^3, \end{aligned}$$

da cui si ottiene $k = -e/(\pi a_0^3)$; pertanto la densità di carica elettronica può essere in definitiva scritta come:

¹²Questa densità di carica corrisponde alla *funzione d'onda* dell'elettrone nel suo livello energetico più basso, ottenibile risolvendo l'equazione di Schrödinger della *Meccanica Quantistica*: $\Psi(r) \sim e^{-r/a_0}$.

$$\rho_e(r) = -\frac{e}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}.$$

La simmetria del problema ci impone questa volta di introdurre come superficie di Gauss una sfera di raggio arbitrario r ; il flusso attraverso di essa del campo elettrico deve essere proporzionale alla carica totale racchiusa al suo interno, ovvero tutta la carica del protone e solo in parte quella dell'elettrone, visto che la *nuvola "elettronica"* si estende all'infinito. Il calcolo esplicito ci permette di trovare il campo elettrico in un generico punto a distanza r dal protone centrale:

$$\begin{aligned}\Phi_S(\mathbf{E}) &= \int \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = E(r) 4\pi r^2 = \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \left\{ e + \int_0^r \rho_e(r') 4\pi r'^2 dr' \right\} = \\ &= \frac{e}{\epsilon_0} \left\{ 1 - \frac{4}{a_0^3} \int_0^r r'^2 e^{-2r'/a_0} dr' \right\} = \\ &= \frac{e}{\epsilon_0} \left\{ 1 + \frac{2r}{a_0} + 2 \left(\frac{r}{a_0} \right)^2 \right\} e^{-2r/a_0},\end{aligned}$$

da cui si ottiene, in definitiva:

$$E(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left\{ 1 + \frac{2r}{a_0} + 2 \left(\frac{r}{a_0} \right)^2 \right\} e^{-2r/a_0}.$$

Possiamo infine calcolare il potenziale in tutto lo spazio applicando l'eq.(5.48), col seguente risultato¹³:

$$\begin{aligned}V(r) &= \int_r^\infty E(r') dr' = \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \left(\frac{1}{r'^2} + \frac{2}{a_0 r'} + \frac{2}{a_0^2} \right) e^{-2r'/a_0} dr' = \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{r} \right) e^{-2r/a_0}.\end{aligned}$$

5.5.3 Energia immagazzinata nel Campo Elettrico

La sola presenza di un campo elettrico in una certa regione di spazio, anche se *vuoto* e privo di materia, implica che in questo stesso spazio sia *immagazzinata* una certa quantità di energia. Per capirlo è sufficiente ricordarsi che il potenziale in un punto dello spazio è interpretabile come l'energia potenziale di una

¹³dove si è tenuto conto che $\int (1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}) e^{-x} dx = -(1 + \frac{2}{x}) e^{-x}$.

eventuale carica unitaria posta nel punto stesso. Pertanto, per un arbitrario sistema di cariche puntiformi, l'energia potenziale può essere scritta:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i, \quad (5.61)$$

dove V_i è il potenziale elettrico nel punto dello spazio in cui è posta la carica Q_i , dovuto a tutte le altre cariche Q_j (con $j \neq i$); il fattore $\frac{1}{2}$ è necessario per evitare di *contare* due volte ciascuna interazione tra le cariche. Considerando un sistema con una distribuzione continua di cariche, utilizzando il Teorema di Gauss in forma differenziale (5.58) e il teorema della divergenza (5.26), si ottiene:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_v \rho V dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_v (\nabla \cdot \mathbf{E}) V dv = \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_v \nabla \cdot (V \mathbf{E}) dv - \frac{\epsilon_0}{2} \int_v \mathbf{E} \cdot (\nabla V) dv = \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \oint_S V \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \frac{\epsilon_0}{2} \int_v E^2 dv; \end{aligned} \quad (5.62)$$

estendendo l'integrazione a tutto lo spazio, il primo integrale tende arbitrariamente a zero, poiché moltiplica la superficie ($\propto r^2$) per il potenziale ($\propto 1/r$) e per il campo elettrico ($\propto 1/r^2$), cosicché resta il secondo, che fornisce la corretta espressione dell'*Energia immagazzinata* in un campo elettrico (statico):

$$U_E = \frac{\epsilon_0}{2} \int_v E^2 dv. \quad (5.63)$$

Desideriamo far notare, tuttavia, che questa espressione non è applicabile al caso di cariche puntiformi, poiché in tal caso si ottiene un risultato infinito privo di senso, legato alla cosiddetta "*auto-energia*" della stessa particella carica. In pratica, per ovviare a questo inconveniente, si può ipotizzare un raggio piccolo, ma non nullo, per queste cariche.

5.6 Espansione in Multipoli e Dipolo Elettrico

Per un sistema discreto di cariche elettriche puntiformi distribuite nello spazio, l'eq.(5.51) permette di determinare il potenziale elettrico in ogni punto. È tuttavia interessante studiare il comportamento di questo potenziale a grandi distanze dalle sorgenti stesse, che possiamo localizzare in un certo intorno dell'origine del sistema di coordinate. In particolare, vediamo come si può scrivere il potenziale (5.51) nell'ipotesi in cui il modulo r del raggio vettore \mathbf{r} ($\equiv \vec{OP}$) sia molto maggiore di ciascun modulo $r_i = |\mathbf{r}_i|, \forall i$. Sviluppando in serie fino al primo ordine il denominatore della (5.51), si ha:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \simeq \frac{1}{r} - \mathbf{r}_i \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) + \dots = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \dots, \quad (5.64)$$

cosicché il potenziale può essere scritto come una somma di termini:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{(\sum_i Q_i)}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{(\sum_i Q_i \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \dots, \quad (5.65)$$

detta *Espansione in Multipoli*. Il primo termine, detto di *Monopolo*, è il classico termine di Coulomb, inversamente proporzionale alla distanza r , che considera il sistema di sorgenti come se fosse costituito da un'unica carica puntiforme $Q_{tot} = \sum_i Q_i$ posta nell'origine. Il secondo termine, detto di *dipolo*, essendo inversamente proporzionale al quadrato della distanza, decresce più rapidamente del precedente, e quindi, se la carica totale $Q_{tot} \neq 0$, può in generale essere ignorato, lasciandoci così col solo termine di monopolo. Tuttavia, per sistemi elettricamente *neutri* ($Q_{tot} = 0$), il termine di monopolo è nullo e quello di dipolo, se presente, può diventare quello dominante¹⁴. In tal caso il potenziale, in prima approssimazione, si può quindi scrivere come:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (5.66)$$

dove si è definito il "Momento di Dipolo Elettrico" \mathbf{p} come il vettore:

$$\mathbf{p} = \sum_i Q_i \mathbf{r}_i, \quad (5.67)$$

e si è indicato con θ l'angolo che questo forma col raggio vettore \mathbf{r} .

Calcolando il (-) gradiente del potenziale dato nell'eq.(5.66) otteniamo anche l'espressione del corrispondente vettore campo elettrico:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{dip} &= -\nabla V(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^3} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left\{ \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{p} \right\}, \end{aligned} \quad (5.68)$$

dove si è tenuto conto del fatto che $\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{p}$ e che $\nabla(1/r^3) = -3\mathbf{r}/r^5$.

Tipici esempi di sistemi di carica equivalenti ad un dipolo elettrico sono le molecole "polarizzate", cioè le molecole nelle quali i baricentri delle cariche positive e negative non coincidono, come nel caso della molecola dell'acqua.

Per studiare l'effetto che ha un campo elettrico esterno \mathbf{E} su un dipolo è conveniente considerare il caso più semplice di due cariche di segno opposto, Q e $-Q$, poste ad una certa distanza d ; in questo caso il loro momento di dipolo è $\mathbf{p} = Q\mathbf{d}$ e l'effetto del campo esterno \mathbf{E} è quello di esercitare sul sistema un momento torcente \mathbf{M}_o che tende ad allineare il dipolo \mathbf{p} col campo:

¹⁴Naturalmente, se anche il termine di *dipolo* è nullo, il termine dominante diventa quello di *quadrupolo*, e così via.

$$\mathbf{M}_o = \mathbf{p} \wedge \mathbf{E}. \quad (5.69)$$

Questo fatto è alla base del fenomeno della “polarizzazione” dei dielettrici polari. Qui non tratteremo l’elettrostatica in presenza dei dielettrici, ma studieremo invece i “conduttori”.

5.7 L’elettrostatica dei Conduttori

Non considerando i “semiconduttori” e i “superconduttori”, possiamo distinguere la materia in *conduttori* e *isolanti*. Nei paragrafi precedenti si è tacitamente assunto di essere in presenza di materiali isolanti, gli unici per i quali è possibile assegnare a priori una qualche distribuzione di carica. Detto in modo un po’ semplificato, potremmo pensare agli isolanti come a quei materiali, per i quali tutti gli elettroni restano strettamente legati ai rispettivi atomi, e non sono quindi *liberi* di vagare all’interno del materiale stesso, anche se sottoposti ad un campo elettrico esterno; in altre parole, non possono “condurre” elettricità. D’altra parte, i materiali *conduttori* sono invece caratterizzati da elettroni (quelli più esterni all’atomo, e quindi più debolmente legati) che di fatto sono liberi di muoversi a causa della loro agitazione termica. Ciò rende quindi possibile la “conduzione elettrica”, una volta che si applichi al conduttore un campo elettrico esterno (ovvero, una “differenza di potenziale” ΔV tra due suoi punti). Poiché vogliamo qui considerare l’elettrostatica dei conduttori (all’*equilibrio*), assumeremo che tutte le cariche siano in quiete. Tale ipotesi ha due importanti implicazioni: la prima è che non è possibile che ci sia alcun campo elettrico \mathbf{E} all’interno del conduttore stesso, rendendo quindi l’intero conduttore *equipotenziale*; la seconda, conseguenza della prima e del Teorema di Gauss, è che all’interno non può esserci neppure alcuna carica. In altre parole, per un conduttore in equilibrio, possiamo scrivere che: $\mathbf{E}_{int} = 0 \Rightarrow Q_{int} = 0$. Corollario di quanto detto è il “Teorema di Coulomb”, ottenibile applicando il teorema di Gauss ad un cilindretto infinitesimo che attraversi la superficie del conduttore in un suo punto P qualsiasi. L’assenza di un campo interno porta allora a concludere che in tale punto il campo elettrico appena all’esterno del conduttore sia perpendicolare alla sua superficie e la sua intensità dipenda solo dalla *locale* densità superficiale di carica. In formula:

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\sigma(P)}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}. \quad (5.70)$$

La differenza fondamentale rispetto al caso in cui si abbiano degli isolanti è che, con i conduttori, le distribuzioni di carica fanno parte delle incognite del problema, al pari del campo o del potenziale. D’altra parte, però, sappiamo che il campo elettrico al loro interno è nullo, e quindi il potenziale è costante. Da un punto di vista matematico, essendo ovunque nulla la densità volumica di carica (sia all’interno, ove $\mathbf{E} = 0$, che all’esterno), l’equazione di Poisson (5.59) si riduce alla:

$$\Delta V = 0, \quad (5.71)$$

detta equazione di Laplace. Il cosiddetto “*Problema Fondamentale dell'Elettrostatica*” (dei conduttori) consiste nel cercare la soluzione (*unica!*) di questa equazione che soddisfi ben determinate condizioni al contorno. Queste condizioni possono essere date essenzialmente in tre modi distinti: (1) si assegnano i potenziali di tutti i conduttori del sistema; (2) si assegnano le rispettive cariche elettriche totali (distribuite in modo incognito sulle superfici); (3) oppure si adotta una scelta *mista*, nel senso che per alcuni conduttori si fissa il potenziale, e per i rimanenti si fissa la carica elettrica; nei tre casi si parla di “problema di *Dirichlet*”, di *Von Neumann*, e *misto*, rispettivamente. La linearità dell'equazione di Laplace (5.71) implica che anche la sua soluzione sia lineare. Nel caso, per esempio, di un sistema di n conduttori, sulle superfici dei quali siano poste le cariche Q_1, Q_2, \dots, Q_n , il potenziale in un qualsiasi punto dello spazio P potrà sempre essere espresso come una combinazione lineare delle sorgenti stesse. In particolare, anche il potenziale del conduttore i -esimo potrà scriversi in questo modo:

$$V_i = a_{i1} Q_1 + a_{i2} Q_2 + \dots + a_{in} Q_n \equiv \sum_{j=1}^n a_{ij} Q_j, \quad (5.72)$$

dove le quantità a_{ij} , dette “coefficienti di potenziale”, dipendono solo dalla *geometria* del sistema, e sono tali che $a_{ij} = a_{ji}$, $a_{ij} > 0$ ($\forall i, j$) e $a_{ii} \geq a_{ij}$ (se $i \neq j$). La formula (5.72) può anche essere convenientemente scritta in forma *matriciale*, come:

$$\mathbf{V} = \|\mathbf{A}\| \mathbf{Q}, \quad (5.73)$$

dove \mathbf{V} e \mathbf{Q} sono i *vettori* (n -uple) dei potenziali e delle cariche, e $\|\mathbf{A}\|$ è la matrice simmetrica dei coefficienti a_{ij} . Invertendo questa formula possiamo anche scrivere:

$$\mathbf{Q} = \|\mathbf{C}\| \mathbf{V}, \quad (5.74)$$

dove $\|\mathbf{C}\| = \|\mathbf{A}\|^{-1}$; i suoi elementi non-diagonali, detti “coefficienti di induzione”, sono tali che $c_{ij} = c_{ji}$ e $c_{ij} < 0$ (se $i \neq j$), mentre quelli diagonali, detti “coefficienti di capacità”, sono tali che $c_{ii} > 0$ ($\forall i$).

Dalla soluzione dell'equazione di Laplace (5.71), e applicando il Teorema di Coulomb (5.70), si arriva infine alla seguente formula, con la quale è possibile determinare anche la distribuzione della carica elettrica presente sulla superficie di ciascun conduttore:

$$\sigma(P) = \epsilon E(P) = -\epsilon \nabla V(P) \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (5.75)$$

essendo $\hat{\mathbf{n}}$ il versore normale uscente dalla superficie in P .

Particolarmente interessanti sono i sistemi costituiti da due conduttori collegati elettricamente tra loro attraverso una batteria (pila) che li mantenga ad una differenza di potenziale (*d.d.p.*) costante V_0 . Nel caso di una *induzione completa*, tale sistema è detto “Condensatore”, ed i due conduttori, detti sue *armature*, hanno sempre cariche uguali ed opposte tra loro, $Q_1 = Q$ e $Q_2 = -Q$. Applicando la (5.72) a questo caso, e tenendo conto della simmetria dei coefficienti di potenziale, per cui $a_{12} = a_{21}$, si può scrivere che:

$$V_1 = (a_{11} - a_{12}) Q , \quad (5.76)$$

$$V_2 = (a_{12} - a_{22}) Q ,$$

da cui, per sottrazione, si ottiene:

$$V_1 - V_2 = (a_{11} + a_{22} - 2a_{12}) Q . \quad (5.77)$$

Questo risultato, assolutamente generale, mostra che il rapporto tra il valore assoluto della carica Q depositata su ciascuna armatura e la loro *d.d.p.* è una *costante*, dipendente solo dalla geometria del sistema:

$$\frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{1}{(a_{11} + a_{22} - 2a_{12})} \equiv C . \quad (5.78)$$

Questa *costante* è detta “capacità” del condensatore, e la sua unità di misura nel *S.I.* è il *Farad*: F ($\equiv C/V$).

Per esempio, nel caso, di un condensatore a facce piane e parallele di superficie S poste a distanza d , si ottiene facilmente la seguente formula:

$$C = \frac{S \epsilon_0}{d} . \quad (5.79)$$

5.7.1 Esempio: Capacità di un Condensatore Cilindrico

Vogliamo qui dare, a titolo illustrativo, un esempio di calcolo della Capacità. Il procedimento, seppur applicato al caso specifico di un condensatore cilindrico, può essere facilmente esteso ad altre “*geometrie*” (*e.g.*, a condensatori piani o sferici).

Il sistema sia costituito da un conduttore cilindrico centrale di lunghezza h e raggio r_a , coassiale ad un secondo conduttore cilindrico (cavo) della stessa lunghezza, raggio interno r_b ($> r_a$) e raggio esterno r_c . Nello spazio compreso tra i due conduttori si assume la presenza di un mezzo isolante caratterizzato da una costante dielettrica ϵ ($= \epsilon_0 \epsilon_r$). Il problema può essere risolto applicando, in sequenza, i principi fondamentali (validi sia per il campo gravitazionale \mathbf{G} che per quello elettrico \mathbf{E}) esposti nel §5.3. Dette Q_a , Q_b e Q_c le cariche (per simmetria, distribuite uniformemente) sulle rispettive superfici dei due conduttori, la conservazione della carica elettrica impone che, essendo il sistema globalmente neutro, deve essere:

$$Q_a + Q_b + Q_c = 0 . \quad (5.80)$$

Sempre per simmetria, il campo \mathbf{E} è ovunque diretto radialmente, per cui utilizzeremo il Teorema di Gauss introducendo opportune superfici (di Gauss) cilindriche: la prima (S_1) ha un raggio r compreso tra r_a ed r_b , e quindi è posta proprio nello spazio che fa da *intercapedine* tra i due conduttori; la seconda (S_2) si trova invece all'interno del conduttore più esterno, avendo quindi un raggio compreso tra r_b ed r_c . Il flusso di \mathbf{E} attraverso la prima superficie dà:

$$\Phi_{S_1}(\mathbf{E}) = \oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = E(r) 2\pi r h = \frac{Q_a}{\epsilon}, \quad (5.81)$$

da cui troviamo:

$$E(r) = \frac{Q_a}{2\pi\epsilon h r}. \quad (5.82)$$

Il flusso che invece attraversa la seconda superficie (S_2) è chiaramente nullo, poiché $\mathbf{E} = 0$ in tutti i suoi punti, essendo all'interno del conduttore più esterno; di conseguenza, l'applicazione del Teorema di Gauss ci garantisce anche l'annullamento della carica totale all'interno della stessa superficie:

$$\Phi_{S_2}(\mathbf{E}) = \oint_{S_2} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{Q_a + Q_b}{\epsilon} = 0. \quad (5.83)$$

Ne consegue che, in virtù della (5.80), la superficie esterna (di raggio r_c) del condensatore è (sempre) scarica: $Q_c = 0$, mentre le due superfici "affacciate" (di raggio r_a ed r_b) hanno cariche esattamente opposte per effetto dell'induzione elettrostatica: $Q_a = -Q_b \equiv Q$. A questo punto non resta che calcolarci la d.d.p. tra le due armature, usando l'eq.(5.48), ottenendo:

$$\begin{aligned} V_a - V_b &= - \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b E(r) dr = \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon h} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon h} \log\left(\frac{b}{a}\right), \end{aligned} \quad (5.84)$$

da cui troviamo la seguente espressione per la capacità di questo condensatore:

$$C = \frac{Q}{V_a - V_b} = \frac{2\pi\epsilon h}{\log\left(\frac{b}{a}\right)}. \quad (5.85)$$

5.8 Conduzione elettrica e Leggi di Ohm

Dopo aver studiato l'elettrostatica dei conduttori all'equilibrio, vediamo quali sono le leggi che ne descrivono il comportamento in presenza di un flusso di cariche, ovvero di una *corrente elettrica*.

È relativamente facile immaginarsi un *modello* che renda conto del fenomeno della *conduzione elettrica* nei conduttori. Come si è già detto, in questo caso i portatori di carica sono gli elettroni più esterni degli atomi (detti infatti *di*

conduzione), capaci di muoversi liberamente all'interno del conduttore stesso. Pertanto, quando si crea un campo elettrico \mathbf{E} al suo interno, su questi elettroni agisce una forza che ne causa un'accelerazione costante. Tuttavia, per effetto dei continui urti (essenzialmente *elastici*) con gli atomi del reticolo, è la loro *velocità media (di deriva)* nella direzione di \mathbf{E} ad essere costante. Per capirne il motivo, possiamo pensare agli elettroni come a *piccole* sferette leggere sospinte all'interno di un *tubo* cilindrico (il *filo* conduttore) da una forza costante; se l'interno del tubo fosse vuoto, le sferette acquisterebbero velocità sempre maggiori. Tuttavia, la situazione cambia drasticamente se riempiamo il tubo di grandi *sfer*e pesanti (gli atomi), sulle quali la forza presente all'interno del tubo non ha alcun effetto. In questo caso, ad ogni urto (elastico) con le sferette, le palline vengono deflesse in direzioni arbitrarie, mantenendo costante il modulo della loro velocità; negli urti *centrali* invertono il loro stato di moto, in quelli *di striscio* questo resta invariato. Con un numero elevato di *palline*, possiamo quindi ritenere che la componente della loro velocità *media* nella direzione della forza si annulli ad ogni urto. Il risultato finale è che, statisticamente, le palline si muoveranno all'interno del tubo con una velocità *media di deriva* costante, proporzionale all'intensità della forza stessa. Nel caso *reale* degli elettroni, diremo quindi che tale velocità è direttamente proporzionale al campo elettrico presente all'interno del conduttore. Definendo allora la *densità (superficiale) di corrente* \mathbf{J} come la quantità di carica che fluisce nell'unità di tempo attraverso l'unità di superficie del conduttore ($dQ/dt dS$) potremo scrivere che:

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} = \sigma_c \mathbf{E}, \quad (5.86)$$

dove la costante di proporzionalità σ_c , detta *conducibilità elettrica*, dipende dal particolare materiale conduttore. L'eq.(5.86) è detta "Legge di Ohm microscopica". Il flusso di \mathbf{J} attraverso una qualche superficie S è detta *Corrente elettrica* (o più semplicemente *Intensità di corrente*):

$$I = \Phi_S(\mathbf{J}) = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS; \quad (5.87)$$

nel *S.I.* la sua unità di misura è l'*Ampere*: $A (\equiv C/s)$. Applicando l'eq.(5.86) ad un tratto AB di conduttore (di conducibilità σ_c) di sezione S , ai cui estremi sia applicata una *d.d.p.* V_0 , si ottiene la (*Prima*) Legge di Ohm:

$$V_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{\sigma_c} \int_A^B \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = R_{AB} I, \quad (5.88)$$

dove la grandezza R_{AB} , definita come:

$$R_{AB} = \frac{1}{\sigma_c} \int_A^B \frac{dl}{dS}, \quad (5.89)$$

è detta "*Resistenza Elettrica*", e nel *S.I.* si misura in *Ohm*: $\Omega (\equiv V/A)$. L'eq.(5.89) è anche nota come *Seconda* Legge di Ohm. Nel semplice caso di un filo conduttore di lunghezza l e sezione S , la resistenza R si calcola come:

$$R = \frac{1}{\sigma_c} \frac{l}{S}; \quad (5.90)$$

spesso si usa anche il reciproco della conducibilità elettrica, $\rho_c = 1/\sigma_c$, detto *resistività elettrica* del materiale.

Lo studio dei circuiti elettrici può essere effettuato applicando le leggi di Kirchhoff, conseguenze dirette di due dei principi fondamentali di cui abbiamo già parlato: la conservazione della carica elettrica e la conservatività del campo \mathbf{E} . Qui non tratteremo questo argomento, solitamente soggetto di testi più tecnici. Vogliamo però studiare il meccanismo con cui i conduttori, caratterizzati da una certa distribuzione iniziale di carica elettrica interna ρ_0 ($\equiv \rho(t=0)$), tendono a raggiungere uno stato di equilibrio attraverso il flusso di cariche dall'interno verso la superficie. Prima di tutto notiamo che, in virtù della conservazione della carica elettrica, quella che nell'unità di tempo esce dall'interno del volume V di un conduttore, $-dQ/dt$, deve sempre essere uguale a quella *trasportata* dal *flusso* di cariche attraverso la sua superficie S ($= \partial V$), cioè dalla corrente I . Questo ovvio fatto può esprimersi con la seguente formula:

$$\begin{aligned} -\frac{dQ}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = I = \Phi_S(\mathbf{J}) = \\ &= \oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV, \end{aligned} \quad (5.91)$$

dove si è usato il Teorema della Divergenza (5.26); data l'arbitrarietà del volume V questa equazione implica che deve aversi identicamente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (5.92)$$

nota come *Equazione di Continuità*. Utilizzando quindi la legge di Ohm microscopica (5.86) e il Teorema di Gauss in forma differenziale (5.58)¹⁵, si giunge infine al seguente risultato:

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\sigma_c}{\epsilon} \rho = 0. \quad (5.93)$$

Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili, la cui integrazione fornisce la seguente soluzione:

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-t/\tau_c}, \quad (5.94)$$

dove il tempo $\tau_c = \epsilon/\sigma_c$, detto *tempo di rilassamento*, è il tempo tipico necessario al conduttore per raggiungere lo stato di equilibrio¹⁶, caratterizzato da un campo ed una distribuzione di carica nulli al suo interno.

¹⁵scritte per un generico mezzo caratterizzato da una conducibilità elettrica σ_c ed una costante dielettrica $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$.

¹⁶In realtà, la densità di carica interna al conduttore si è solo ridotta di un fattore "e": $\rho(t = \tau_c) = \rho_0/e$.

5.9 Il Campo magnetico

È inevitabile associare il Campo Magnetico alle familiari *calamite* o alla *bussola*. E d'altra parte, anche quest'ultima non è altro che una piccola calamita, libera di ruotare e quindi di orientarsi nella direzione sud-nord del campo magnetico terrestre. La Terra stessa, in effetti, può ritenersi un grosso magnete, grazie al ferro presente nel suo nucleo. Ma al di là di questi aspetti piuttosto noti, che cos'è, davvero, il Campo Magnetico? Quali sono le sue proprietà? E qual'è il suo *legame* col Campo Elettrico? In che senso costituisce con quest'ultimo quello che è propriamente detto *Campo Elettromagnetico*? In questo paragrafo cercheremo di rispondere a questi quesiti.

Prima di tutto, ricordiamo che le *polarità* di un magnete sono dette *nord* e *sud*, in virtù della loro attuale¹⁷ (*quasi*) coincidenza coi rispettivi poli geografici terrestri. Queste polarità possono essere considerate le *sorgenti* del Campo Magnetico \mathbf{B} . La prima sorpresa è che non è possibile in nessun modo separare il polo nord dal polo sud; ciò può essere facilmente verificato osservando che dalla rottura di una qualsiasi calamita in due metà, queste avranno ancora entrambe le polarità, e costituiranno quindi due nuove calamite più piccole. Detto in altri termini, possiamo concludere che non esistono sorgenti isolate del Campo Magnetico, i cosiddetti *Monopoli Magnetici*¹⁸, in netto contrasto col Campo Elettrico, per il quale le sorgenti isolate, le cariche elettriche, sono evidentemente presenti in natura. Diretta conseguenza dell'impossibilità di avere Monopoli Magnetici è il fatto che le linee del campo \mathbf{B} (per convenzione uscenti dai poli nord ed entranti in quelli sud) sono *sempre* chiuse; questo implica che il flusso netto di \mathbf{B} uscente da una qualsiasi superficie chiusa S è sempre nullo:

$$\Phi_S(\mathbf{B}) = \oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0. \quad (5.95)$$

Applicando il Teorema della Divergenza (5.26) e tenendo conto dell'arbitrarietà del volume V , si ottiene quindi:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5.96)$$

secondo la quale il Campo Magnetico \mathbf{B} è un campo *Solenoidale*. Questa equazione è nota come "Seconda Equazione di Maxwell". Ancora una volta, ci viene confermata l'interpretazione fisica della "divergenza" di un campo vettoriale, come grandezza scalare che quantifica l'entità delle sue *sorgenti* in un determinato punto dello spazio. La loro totale assenza nel caso del campo \mathbf{B} non poteva che portare alla (5.96). Inoltre, come già anticipato nell'eq.(5.37), la *solenodalità* del campo magnetico implica che questo possa sempre essere espresso come *rotore* di un altro campo \mathbf{A} , detto *Potenziale Vettore*:

¹⁷Va tuttavia fatto notare che nel corso dell'evoluzione terrestre, i poli magnetici hanno subito perfino delle vere e proprie inversioni di direzione.

¹⁸I Monopoli Magnetici possono essere esistiti solo nelle prime frazioni di secondo dopo il Big Bang, durante l'Epoca di Grande Unificazione, cioè quando le tre interazioni fondamentali, forte ed elettrodebole, erano *fuse* in un'unica "superforza".

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}. \quad (5.97)$$

Non abbiamo, tuttavia, ancora detto come viene *generato* un campo magnetico. Mentre il campo elettrico è dovuto alla sola presenza delle cariche elettriche nello spazio circostante, il campo magnetico viene prodotto solo quando queste cariche sono in moto, cioè in presenza di *correnti elettriche*. Di conseguenza, solo su queste ultime esso eserciterà un'azione. Per definire quantitativamente il campo \mathbf{B} , in effetti, si utilizza proprio la forza che questo esercita su un tratto di filo conduttore lungo $d\mathbf{l}$, percorso da una corrente I , immerso in esso; tale forza risulta essere sempre perpendicolare sia al filo ($d\mathbf{l}$) che al campo. Nel *S.I.* si usa come unità di misura di \mathbf{B} il *Tesla* (T), definito in modo tale da poter scrivere tale forza con una costante di proporzionalità unitaria:

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}. \quad (5.98)$$

Per una distribuzione continua di correnti, essendo I data dal flusso della *densità (superficiale) di corrente* \mathbf{J} , si ottiene:

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{J} \wedge \mathbf{B} dV, \quad (5.99)$$

mentre, nel caso di una singola carica elettrica puntiforme Q in moto con velocità \mathbf{v} ed immersa nel campo \mathbf{B} , troviamo l'espressione della cosiddetta *Forza di Lorentz*:

$$\mathbf{F} = Q \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}. \quad (5.100)$$

Per scrivere invece in che modo il campo \mathbf{B} viene *generato* dalle correnti elettriche, possiamo partire dall'eq.(5.46) per il campo elettrico dovuto ad una carica puntiforme dQ posta nell'origine, con le dovute *sostituzioni*:

$$\mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{B}, \quad dQ \Leftrightarrow (I d\mathbf{l}), \quad \frac{1}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \mu_0, \quad (5.101)$$

dove la costante $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} N/A^2$ è detta *permeabilità magnetica* (del vuoto); si ottiene così:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{r}}{r^3}. \quad (5.102)$$

Questa formula dà il campo magnetico in un generico punto P (di raggio vettore $\mathbf{r} \equiv \vec{OP}$) dovuto ad un elemento infinitesimo di corrente ($I d\mathbf{l}$) posto nell'origine. La generalizzazione al campo \mathbf{B} generato da una distribuzione continua di correnti \mathbf{J} nello spazio porta al seguente risultato:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \quad (5.103)$$

Anche se, in linea di principio, le eq.(5.102) e (5.103) permettono la determinazione del campo \mathbf{B} di una qualsivoglia distribuzione di correnti nello spazio, nel

caso in cui queste presentano particolari simmetrie, il calcolo è reso semplificato dall'applicazione del cosiddetto *Teorema di Ampere*, un teorema che ha quindi un ruolo simile a quello del Teorema di Gauss per il campo elettrico. Questo teorema, almeno nel caso di correnti (e campi) *stazionari*, afferma che la *Circuitazione* del campo magnetico \mathbf{B} su una qualsiasi curva chiusa γ è direttamente proporzionale alla somma algebrica delle correnti ad essa concatenate:

$$\mathcal{C}_\gamma(\mathbf{B}) = \oint_\gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_{conc}. \quad (5.104)$$

È possibile anche in questo caso scrivere il teorema in forma differenziale. Considerando infatti un'arbitraria distribuzione continua di correnti elettriche \mathbf{J} e facendo uso del teorema di Stokes (5.29), possiamo scrivere che

$$\oint_\gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \wedge \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS,$$

ovvero:

$$\int_S (\nabla \wedge \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0. \quad (5.105)$$

Poiché questo risultato deve essere valido per ciascuna delle infinite possibili superfici S che hanno come contorno la curva γ su cui viene fatta la circuitazione, ne possiamo concludere che deve essere identicamente nulla la funzione integranda tra parentesi, e quindi:

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (5.106)$$

Questa equazione rappresenta il Teorema di Ampere in forma differenziale, ed è anche nota come Terza equazione di Maxwell *incompleta*. È detta incompleta perché, come mostriamo nel prossimo paragrafo, nel caso di campi non-stazionari è necessario un termine aggiuntivo.

Come nel caso del teorema di Gauss, anche quello di Ampere risulta utile ai fini della determinazione del campo (\mathbf{B}) in tutto lo spazio solo se, data la simmetria del sistema, siamo in grado di intuire a priori come è diretto il campo stesso. Per la sua applicazione si introducono particolari curve chiuse γ (invece delle *superfici di Gauss* utilizzate per il campo elettrico), scelte in modo che risulti particolarmente semplice il calcolo della circuitazione di \mathbf{B} , viste le suddette proprietà di simmetria. L'esempio più semplice, ma anche più significativo, è senz'altro quello relativo al campo generato da un lungo filo rettilineo percorso da una corrente I . In questo caso, vista la simmetria assiale (cilindrica), il campo \mathbf{B} è necessariamente tangenziale alle circonferenze concentriche che hanno come asse lo stesso filo conduttore, per cui sceglieremo come *curve di Ampere* proprio tali circonferenze (di raggio qualsiasi r). In tal caso la circuitazione su di esse dà il seguente risultato:

$$\mathcal{C}_\gamma(\mathbf{B}) = \oint_\gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B(r) 2\pi r = \mu_0 I,$$

da cui si ottiene la cosiddetta *Legge di Biot-Savart*:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (5.107)$$

A conclusione di questa *breve* esposizione relativa al campo magnetico, vogliamo precisare che anche in questo caso possiamo parlare di un'energia immagazzinata nel campo stesso, ottenibile semplicemente con le *sostituzioni* date in eq.(5.101). Il risultato, simile a quanto ottenuto per il campo elettrico (eq.(5.63)), è il seguente:

$$U_B = \frac{1}{2\mu_0} \int_v B^2 dv. \quad (5.108)$$

5.9.1 Esempio: Spira circolare percorsa da corrente e “Momento Magnetico”

Anche allo scopo di definire il “Momento Magnetico”, vogliamo calcolare il campo magnetico sull'asse di una spira circolare di raggio a percorsa da una corrente I . Anche se in questo caso il Teorema di Ampere (5.104) non è utilizzabile, il calcolo risulta piuttosto semplice, tenuto conto che, per simmetria, sappiamo che il campo \mathbf{B} in un punto P dell'asse a distanza z dalla spira, sarà proprio diretto verso l'asse stesso. Applicando la formula (5.102) a questo esercizio, si osserva che l'elemento $d\mathbf{l}$ è costantemente perpendicolare al vettore \mathbf{r} che va dall'elemento di corrente al punto P , per cui il vettore infinitesimo di campo magnetico $d\mathbf{B}$ ha modulo:

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2},$$

ed è inclinato di un angolo θ rispetto all'asse, con $\cos\theta = a/r$. Pertanto, l'elemento infinitesimo di campo in P diretto lungo l'asse si scriverà:

$$dB_z = dB \cos\theta = \frac{\mu_0 I dl a}{4\pi r^3}.$$

Poiché l'integrazione in dl dà semplicemente la circonferenza della spira: $\oint dl = 2\pi a$, si ottiene, in definitiva:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(z) &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{(\pi a^2 I)}{r^3} \hat{\mathbf{k}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{(\pi a^2 I)}{\sqrt{(a^2 + z^2)^3}} \hat{\mathbf{k}} = \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mathbf{m}}{\sqrt{(a^2 + z^2)^3}}, \end{aligned} \quad (5.109)$$

dove si è definito il *Momento Magnetico* \mathbf{m} come un vettore diretto perpendicolarmente alla spira (diretto quindi come il suo versore normale \hat{n}), di modulo pari al prodotto della sua superficie S per l'intensità della corrente I che la attraversa:

$$\mathbf{m} = \pi a^2 I \hat{\mathbf{k}} = I S \hat{\mathbf{n}}. \quad (5.110)$$

La spira costituisce un esempio di ciò che viene detto *Dipolo Magnetico*. Il nome non è casuale, poiché, per certi aspetti il “Momento Magnetico” è proprio l’analogo del “Momento di Dipolo Elettrico” definito nella (5.67). In effetti, la formula (5.68) porta ad un’espressione per il campo elettrico sull’asse del dipolo (a distanza r) assolutamente analoga alla (5.109): $E(r) = p/(2\pi\epsilon_0 r^3)$. Oltre a ciò, anche l’effetto di un campo magnetico esterno \mathbf{B} su un Dipolo Magnetico è simile a quanto visto a proposito del Dipolo Elettrico (eq.(5.69)), nel senso che si trova un momento torcente che tende ad allineare l’asse del Dipolo-spira col campo stesso:

$$\mathbf{M}_o = \mathbf{m} \wedge \mathbf{B}. \quad (5.111)$$

5.9.2 Esercizio: Superficie sferica uniformemente carica in rotazione uniforme

In questo *esercizio*, si vuole calcolare il campo magnetico esistente al centro di un sottile guscio sferico di raggio R uniformemente carico (caratterizzato da una densità di carica superficiale σ), mantenuto in rotazione uniforme intorno ad un suo asse con una velocità angolare ω .

Svolgimento

Sia z l’asse di rotazione della sfera, e si utilizzino le coordinate sferiche definite nelle eq.(5.14) e (5.15). La sfera può essere considerata come l’insieme di infinite spirette circolari perpendicolari all’asse z . La generica spiretta è delimitata dai *paralleli* compresi tra θ e $\theta + d\theta$ ed ha raggio $R \sin \theta$. La sua carica elettrica dQ è data dal prodotto della densità di carica σ per la sua superficie infinitesima dS_{sp} che, in virtù dell’eq.(5.16), può scriversi: $dS_{sp} = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$. La corrente infinitesima dI che la attraversa si ottiene quindi dividendo questa carica per il periodo di rotazione $T = 2\pi/\omega$, ottenendo così:

$$dI = \frac{dQ}{T} = \frac{\sigma dS_{sp}}{\frac{2\pi}{\omega}} = \omega \sigma R^2 \sin \theta d\theta.$$

Inserendo questo risultato nella formula (5.109) per il campo magnetico sull’asse di una spira, si trova:

$$\begin{aligned} dB &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{dI \pi (R \sin \theta)^2}{(R^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\omega \sigma R^2 \sin \theta d\theta (\pi R^2 \sin^2 \theta)}{(R^3)} = \\ &= \frac{\mu_0}{2} \omega \sigma R \sin^3 \theta d\theta, \end{aligned} \quad (5.112)$$

da cui, per integrazione in θ , si ottiene il campo cercato al centro della sfera, diretto verso l'asse stesso:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0}{2} \omega \sigma R \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = -\frac{\mu_0}{2} \omega \sigma R \int \sin^2 \theta d(\cos \theta) = \\ &= -\frac{\mu_0}{2} \omega \sigma R \int_1^{-1} (1 - \xi^2) d\xi = \frac{2}{3} \mu_0 \omega \sigma R, \end{aligned} \quad (5.113)$$

dove nell'integrale si è fatta la *sostituzione*: $\xi = \cos \theta$.

5.9.3 Corrente di Spostamento e Terza equazione di Maxwell

Che il Teorema di Ampere nella forma data nell'eq.(5.106) sia *incompleto* risulta evidente dal fatto che esso implica che la densità di corrente \mathbf{J} presente al secondo membro sia necessariamente *solenoidale*; infatti, applicando scalarmente l'operatore *nabla* a questa equazione, e tenendo conto della (5.36), troviamo:

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B}) = 0 = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (5.114)$$

La solenodalità di questa densità di corrente è incompatibile con l'equazione di continuità (5.92), almeno nel caso non-stazionario; questo significa semplicemente che non è possibile identificare la densità di corrente presente nel teorema di Ampere (5.106) con quella di *conduzione* dell'eq.(5.92), perché questa non è in generale solenoidale. Tuttavia, se si utilizza il teorema di Gauss (5.58) per esprimere la densità di carica come: $\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$, e si sostituisce nell'equazione di continuità (5.92), si trova che:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0.$$

Questo risultato mostra che, in effetti, anche nel caso generale non-stazionario esiste una densità di corrente *totale* che resta sempre solenoidale, data dalla somma di quella di *conduzione* \mathbf{J} e di un termine aggiuntivo, detta "densità di corrente *di spostamento*", data da:

$$\mathbf{J}_{sp} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (5.115)$$

Da quanto detto, è evidente che è la densità di corrente *totale*, sempre a divergenza nulla, che può essere identificata con quella presente nel teorema di Ampere. Questo ci porta, quindi, a poter scrivere tale teorema nella forma più completa:

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (5.116)$$

dove la costante c , data da: $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, risulta essere proprio la *velocità della luce*¹⁹. L'eq.(5.116) è detta Terza equazione di Maxwell (nella sua forma *completa*). La sua conseguenza più importante è che i campi magnetici non hanno come uniche sorgenti le ordinarie correnti associate ai flussi di cariche elettriche in moto, ma possono essere generati anche da campi elettrici *variabili* nel tempo. Nel prossimo paragrafo vedremo che, analogamente, un campo magnetico *variabile* può produrre un campo elettrico. Questo fatto sarà all'origine della possibilità di avere campi elettrici e magnetici *autosostenuti* che si propagano nello spazio (a velocità c): le onde elettromagnetiche.

5.10 Induzione Elettromagnetica e Quarta equazione di Maxwell

Nel 1831, attraverso una serie di esperimenti ormai celebri, Faraday fece una fondamentale scoperta: muovendo un filo conduttore chiuso all'interno di un campo magnetico, o comunque immergendolo in un flusso variabile $\Phi(\mathbf{B})$, si osserva un passaggio di corrente, detta *indotta*. Più propriamente, questa corrente è causata da una “forza elettromotrice” (*f.e.m.*) *indotta*, \mathcal{E} , uguale alla velocità di variazione del flusso stesso. L'equazione che descrive questo fenomeno è quindi la seguente:

$$\mathcal{E} = \oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_S(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (5.117)$$

detta “Legge di Faraday-Lenz”; in realtà, è il solo segno *meno* ad essere dovuto a Lenz. Questo segno ci informa che la corrente indotta è diretta in modo tale da creare un *controcampo* magnetico il cui flusso si oppone alla variazione del flusso del campo *esterno*. L'applicazione del teorema di Stokes (5.29) ci permette di scrivere l'eq.(5.117) in forma differenziale:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \wedge \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS,$$

da cui:

$$\int_S (\nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0.$$

La validità di questa espressione per ognuna delle infinite superfici possibili aventi il medesimo *contorno* γ su cui viene effettuata la circuitazione (di \mathbf{E}), implica che deve essere identicamente nulla la funzione integranda, cosicché si ottiene:

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (5.118)$$

¹⁹Il motivo per cui questa *combinazione* è proprio la velocità della luce, cioè delle onde elettromagnetiche, sarà chiarito nel §5.11.

Questa è la Quarta (ed ultima) equazione di Maxwell, che descrive come un campo elettrico possa essere prodotto dalla variazione temporale di un campo magnetico, in stretta analogia con quanto visto a proposito della Terza equazione di Maxwell (5.116), dove era il campo magnetico ad essere l'effetto di un campo elettrico variabile. Si fa anche notare che l'eq.(5.118) implica la non-conservatività del campo elettrico in condizioni non-stazionarie, cioè in presenza di campi variabili. È tuttavia possibile introdurre ancora un potenziale *scalare*. Infatti, poiché a causa della sua solenodalità il campo \mathbf{B} può sempre essere scritto come rotore di un opportuno “potenziale vettore” \mathbf{A} , dall'eq.(5.118) si trova che esiste ancora una combinazione di vettori a rotore nullo (e quindi conservativa) che può essere scritta come (*meno*) *gradiente* di un “potenziale scalare” V :

$$\nabla \wedge \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0,$$

Questo risultato, aggiunto a quanto ottenuto in precedenza per il campo magnetico (eq.(5.97)), ci permette di esprimere entrambi i campi in funzione dei cosiddetti “*potenziali elettromagnetici*”²⁰ \mathbf{A} e V :

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (5.119)$$

5.11 Equazioni di Maxwell nel vuoto e Onde Elettromagnetiche

Tutti i fenomeni elettromagnetici possono essere descritti dalle quattro equazioni di Maxwell ottenute nei *paragrafi* precedenti. Nel caso generale in cui sono presenti sia cariche che correnti elettriche, queste equazioni assumono la seguente forma:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \wedge \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \nabla \wedge \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5.120)$$

L'aspetto forse più sorprendente di queste equazioni, è che esse ammettono soluzioni (*i.e.*, campi \mathbf{E} e \mathbf{B}) non-nulle anche in assenza di *sorgenti*, cioè nel vuoto, dove non sono presenti né cariche né correnti. Per rendersi conto di ciò, riscriviamo quindi le eq.(5.120) ponendo $\rho = 0$ e $\mathbf{J} = 0$:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \wedge \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \nabla \wedge \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5.121)$$

²⁰Questi potenziali possono essere elegantemente inglobati in un unico *4-vettore* A^μ (= $(A^0 = V, \mathbf{A})$).

Applicando l'operatore del "rotore" (cioè $\nabla \wedge$) ad ambo i membri della Terza equazione, si ha:

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \wedge \mathbf{E}),$$

dove $\Delta = \nabla \cdot \nabla \equiv \nabla^2$ è l'operatore Laplaciano già introdotto nella (5.38), e dove si è usata un'identità simile alla (5.10). Tenendo quindi conto sia della seconda che della quarta equazione di Maxwell, troviamo che il campo \mathbf{B} deve soddisfare la seguente equazione:

$$\Delta \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (5.122)$$

Questa è la ben nota equazione di D'Alembert delle *onde*. Ovviamente, con lo stesso procedimento, ma partendo dalla quarta equazione di Maxwell, si otterrebbe la stessa equazione anche per il campo elettrico \mathbf{E} :

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (5.123)$$

I campi \mathbf{E} e \mathbf{B} che soddisfano queste equazioni rappresentano quindi *Onde Elettromagnetiche* che si propagano nel vuoto con velocità c ($= 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$). Per verificare che l'equazione di D'Alembert descrive in effetti la propagazione di onde, cercheremo di risolverla nel caso semplificato in cui si abbia una sola coordinata spaziale, *e.g.*, la x . In tal caso, l'eq.(5.122) si riduce alla:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (5.124)$$

Questa equazione assume una forma particolarmente semplice effettuando il seguente cambiamento di variabili:

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct. \quad (5.125)$$

Poiché le derivate parziali rispetto a x e a t diventano:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta},$$

e:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{c} \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta},$$

facendone il quadrato e sottraendo membro a membro, vediamo che l'eq.(5.124) può essere scritta molto più semplicemente come:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (5.126)$$

Questa equazione implica, per esempio, che

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \eta} = F(\eta),$$

dove $F(\eta)$ è una funzione arbitraria della sola variabile η ; integrando quindi rispetto a η , (e aggiungendo una *costante di integrazione* g che può però dipendere da ξ) si trova:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\xi, \eta) &= \int F(\eta) d\eta + g(\xi) \equiv f(\eta) + g(\xi) \equiv \\ &\equiv f(x - ct) + g(x + ct). \end{aligned} \quad (5.127)$$

Questo risultato mostra che la soluzione generale dell'eq.(5.124) è sempre esprimibile come somma di due funzioni arbitrarie nelle variabili $\eta = x - ct$ e $\xi = x + ct$; la prima rappresenta onde *progressive* che si propagano verso $+x$, mentre la seconda onde *regressive* che si propagano verso $-x$, entrambe con velocità c . Questo significa che, per esempio, un campo elettrico \mathbf{E} che si propaga lungo l'asse x positivo si può scrivere come:

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 \cos(kx - \omega t)$$

dove E_0 è l'*ampiezza* dell'onda, k è il "numero d'onda" (legato alla lunghezza d'onda λ dalla relazione: $k = 2\pi/\lambda$), e ω ($= 2\pi/T = 2\pi\nu$) è la sua *pulsazione*. La generalizzazione ad un campo che si propaga in una direzione arbitraria definita dal versore $\hat{\mathbf{n}}$ è immediata:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (5.128)$$

in questo caso $\mathbf{k} = k \hat{\mathbf{n}}$ è detto "vettore d'onda".

A questo punto, quindi, sappiamo che il sistema di equazioni di Maxwell nel vuoto (5.121) ammette come soluzione campi elettrici \mathbf{E} e campi magnetici \mathbf{B} che, autoalimentandosi a vicenda, si propagano come onde. Per vedere in dettaglio come questi campi sono diretti nello spazio, conviene scrivere la soluzione (5.128) in forma *esponenziale complessa*:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (5.129)$$

con un'espressione simile anche per il campo magnetico. Osservando che per tali soluzioni l'applicazione dell'operatore *nabla* equivale a *moltiplicare* per il fattore $i\mathbf{k}$, vediamo che le prime due equazioni di Maxwell, portano al seguente risultato:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &\equiv \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{r}} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &\equiv \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{r}} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0, \end{aligned} \quad (5.130)$$

che ci informa della natura *trasversale* delle onde elettromagnetiche, cioè del fatto che i campi elettrico e magnetico sono sempre costantemente perpendicolari alla direzione di propagazione dell'onda stessa. Analogamente, l'applicazione della terza (o della quarta) equazione di Maxwell alla soluzione (5.129), dà:

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \mathbf{B} &= i \mathbf{k} \wedge \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} (-i \omega) \mathbf{E} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{E} &= \frac{c^2}{\omega} \mathbf{B} \wedge \mathbf{k} = c \mathbf{B} \wedge \hat{\mathbf{n}}.\end{aligned}\tag{5.131}$$

Questa equazione ci dice che nelle onde elettromagnetiche i campi elettrici e magnetici sono anche perpendicolari tra loro, cosicché $(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \hat{\mathbf{n}})$ costituiscono una *terna destrorsa* ortogonale. Inoltre anche i loro *moduli* sono legati tra loro, dalla relazione:

$$\frac{E}{B} = c.\tag{5.132}$$

5.12 Energia Elettromagnetica e Teorema di Poynting

Vogliamo adesso studiare l'energia associata alle onde elettromagnetiche, energia che viene *trasportata* dall'onda stessa alla velocità della luce. In precedenza abbiamo già osservato che esiste un'energia associata alla sola presenza dei campi elettrico e magnetico nello spazio, data dalle eq.(5.63) e (5.108). Pertanto, se in una certa regione di spazio sono presenti entrambi i campi, avremo un'energia totale immagazzinata data dalla:

$$U_{em} = \frac{1}{2} \int_V \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) dV,\tag{5.133}$$

L'effetto di questi campi su una eventuale distribuzione di carica è descritto dalle forze di Coulomb e di Lorentz. In particolare, su ciascun elemento di carica $dQ = \rho dV$ agirà una forza data da:

$$d\mathbf{F} = \rho (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) dV,$$

dove \mathbf{v} è la sua velocità. Il *lavoro* compiuto nell'unità di tempo e per unità di volume risulta quindi essere:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dV dt} = \frac{d\mathbf{F}}{dV} \cdot \mathbf{v} = \rho (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \equiv \mathbf{J} \cdot \mathbf{E},$$

essendo nullo il lavoro compiuto dal campo magnetico. Integrando su tutto lo spazio si ottiene pertanto:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV.$$

Utilizzando la Terza equazione di Maxwell (5.116) per esprimere la densità di corrente \mathbf{J} in termini dei campi, troviamo:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \int_V \mathbf{E} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \wedge \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) dV; \quad (5.134)$$

il primo termine nell'integrale può essere scritto diversamente osservando che:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B}) = -\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B}),$$

per cui:

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B}) = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t};$$

sostituendo quindi nella (5.134) otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= - \int_V \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) dV = \\ &= - \frac{1}{\mu_0} \oint_S (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{B^2}{\mu_0} + \epsilon_0 E^2 \right) dV, \end{aligned} \quad (5.135)$$

dove si è fatto uso del teorema della divergenza (5.26). L'ultimo termine rappresenta proprio la variazione dell'energia elettromagnetica (data nell'eq.(5.133)) nell'unità di tempo.

Definendo quindi il *Vettore di Poynting* \mathbf{S} come:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}, \quad (5.136)$$

possiamo esprimere il nostro risultato (5.135) come:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} + \Phi_S(\mathbf{S}) = - \frac{\partial U_{em}}{\partial t}, \quad (5.137)$$

ovvero, per unità di volume:

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{S} = - \frac{\partial u_{em}}{\partial t}, \quad (5.138)$$

essendo $u_{em} = dU_{em}/dV$ la densità di energia elettromagnetica. Le eq.(5.137) e (5.138) rappresentano il cosiddetto "Teorema di Poynting". L'interpretazione del risultato ottenuto è evidente e chiarisce il significato fisico del vettore di Poynting: "Nell'unità di tempo, la variazione dell'energia elettromagnetica in una certa regione di spazio è causata dal lavoro compiuto dai campi sulle cariche ivi contenute e dal flusso di energia trasportata dalle onde elettromagnetiche che ne attraversano la superficie". Detto in altri termini, il vettore di Poynting \mathbf{S} rappresenta la potenza trasportata da un'onda elettromagnetica per unità di superficie nella sua direzione di propagazione. Infatti, tenendo conto di quanto ottenuto nel paragrafo precedente (vedi eq.(5.131) e (5.132)), vediamo che per un'onda *e.m.* \mathbf{S} è diretto come $\text{vers}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) = \hat{\mathbf{n}}$ ed ha un modulo proporzionale al quadrato della sua ampiezza:

$$S = \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}| = \frac{1}{\mu_0} \frac{E_0^2}{c} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2. \quad (5.139)$$

Capitolo 6

Elementi di Fisica Quantistica

6.1 Introduzione

Nel periodo che va dalla fine del diciannovesimo secolo ai primi decenni del ventesimo secolo, una serie di risultati sperimentali, riguardanti fenomeni che avvengono su scala atomica, portarono alla “Crisi della Fisica Classica”. L’interpretazione di questi risultati richiese un cambiamento radicale nelle nostre concezioni del mondo e nelle leggi classiche fondamentali che lo descrivono. Discuteremo in quest’ultimo capitolo alcuni di questi risultati, ed in particolare quelli che evidenziarono le proprietà corpuscolari della radiazione e, per contro, le proprietà ondulatorie della materia.

6.2 Lo Spettro del Corpo Nero

Nel 1900, Max Planck derivò la sua famosa formula per la Radiazione di Corpo Nero mediante un’ingegnosa interpolazione tra la formula di Wien

$$u(\nu, T) = C \nu^3 e^{-\beta \nu/T}, \quad (6.1)$$

che risultava valida per alte frequenze ν , e la formula di Rayleigh-Jeans:

$$u(\nu, T) = \frac{8 \pi \nu^2}{c^3} K T, \quad (6.2)$$

(dove K è la costante di Boltzmann, T è la temperatura assoluta e c è la velocità della luce). La formula suggerita da Planck:

$$u(\nu, T) = \frac{8 \pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/KT} - 1}, \quad (6.3)$$

risultò essere in perfetto accordo con le misure sperimentali. Il valore ottenuto per la Costante di Planck è: $h \simeq 6.62 \times 10^{-34} \text{ J s}$.

La formula classica di Rayleigh-Jeans era stata derivata semplicemente calcolando il numero di modi *normali* di oscillazione con frequenza compresa tra ν e $\nu + d\nu$, associando a ciascun modo un'energia media $K T$, in accordo con la legge classica di equipartizione dell'energia, già vista nel §4.1.1. La formula di Rayleigh-Jeans non poteva comunque in generale essere corretta poiché conduce ad una densità di energia totale (integrata su tutte le frequenze) infinita! La cosiddetta “catastrofe ultravioletta”.

Una deviazione dalle leggi di equipartizione dell'energia non poteva essere del resto totalmente inaspettata. Già nel 1872 ad esempio, nelle misure dei calori specifici dei solidi erano state osservate deviazioni dalla legge classica di Dulong e Petit, basata appunto sulla legge di equipartizione.

Il perfetto accordo della sua formula con i risultati sperimentali indusse Planck a cercare una spiegazione teorica. Egli trovò allora che la formula per lo spettro di corpo nero poteva essere derivata assumendo che l'energia associata con ciascun *modo* del campo elettromagnetico non potesse variare con continuità, ma dovesse bensì essere sempre un multiplo di un “quanto” minimo di energia E , direttamente proporzionale alla frequenza stessa del *modo normale*:

$$\epsilon = h \nu . \quad (6.4)$$

In questo caso infatti, come dimostreremo nel §6.4, l'energia media associata a ciascun *modo normale* a temperatura T risulta essere data proprio dalla formula di Planck (6.4).

La dimostrazione di questo risultato parte dal considerare il “corpo nero” come un insieme di oscillatori armonici (gli atomi) che emettono onde elettromagnetiche con lunghezze d'onda (e frequenze) che variano con continuità. Cerchiamo quindi il numero dei *treni d'onda* (o *gradi di libertà equivalenti*) con lunghezze d'onda comprese tra λ e $\lambda - d\lambda$ (cioè con frequenze comprese tra ν e $\nu + d\nu$). L'energia che compete a ciascun grado di libertà, come è noto dalla Teoria Statistica (e dal Teorema di Equipartizione) è data da:

$$\frac{1}{2} K T \text{ (En. Cinetica)} + \frac{1}{2} K T \text{ (En. Potenziale)} = K T \quad (\forall \text{ grado di libertà}).$$

Supponiamo quindi che la radiazione di lunghezza d'onda λ formi onde stazionarie, essendo rinchiusa fra pareti perfettamente riflettenti separate da una distanza a . Per cui, se consideriamo una *scatola* cubica di lato a , si deve avere:

$$\begin{cases} \alpha a = n_1 \lambda/2, \\ \beta a = n_2 \lambda/2, \\ \gamma a = n_3 \lambda/2, \end{cases} \quad (6.5)$$

dove α , β , γ , sono i *coseni direttori* della direzione di propagazione della radiazione ($\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$), e gli n_i ($i = 1, 2, 3$) sono numeri interi positivi. Quadrando e sommando le tre equazioni (6.5) si ottiene quindi:

$$a^2 = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \lambda^2/4 ,$$

ovvero, essendo $\nu = c/\lambda$:

$$\nu = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \left(\frac{c}{2a} \right).$$

Essendo gli n_i numeri interi positivi, questa espressione può essere vista come un'ottante di sfera di raggio ν nello spazio delle frequenze. Il volume di un guscio sferico con frequenza tra ν e $\nu + d\nu$, che è $4\pi\nu^2 d\nu$, va pertanto diviso per 8. Per ottenere allora il numero totale di vibrazioni indipendenti in un cubo di volume a^3 dobbiamo dividere il volume del guscio stesso per il volume del cubetto elementare nello spazio delle frequenze, che è $(c/2a)^3$, ottenendo così:

$$\frac{4\pi\nu^2 d\nu}{8} \frac{1}{\left(\frac{c}{2a}\right)^3} = \frac{4\pi\nu^2 d\nu a^3}{c^3}.$$

Per unità di volume, si ottiene pertanto:

$$\frac{4\pi\nu^2 d\nu}{c^3},$$

ovvero, tenendo conto delle due diverse possibilità di polarizzazione della radiazione elettromagnetica:

$$\frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3}. \quad (6.6)$$

L'energia totale irradiata può allora essere ottenuta moltiplicando l'energia media, $\bar{E} = KT$, prevista dal Teorema di Equipartizione, per questo numero totale di modi di vibrazione indipendenti, e sommando su tutte le frequenze possibili da 0 a ∞ :

$$\begin{aligned} U_e &= \int_0^\infty u(\nu) d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \nu^2 \bar{E} d\nu = \\ &= \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \nu^2 KT d\nu \rightarrow \infty ! \end{aligned} \quad (6.7)$$

Questo fatto è noto come "Catastrofe Ultravioletta", in evidente disaccordo col risultato sperimentale di un'energia irradiata *finita* proporzionale alla quarta potenza della temperatura, data nell'eq.(3.31):

$$U_e = \sigma T^4, \quad (6.8)$$

(legge di Wien-Boltzmann) dove $\sigma \simeq 5.67 \times 10^{-8} W/m^2 K^4$ è la cosiddetta Costante di Stefan-Boltzmann. In conclusione, le leggi classiche della Termodinamica Statistica e dell'Elettromagnetismo non sono in grado di spiegare il fenomeno legato alla radiazione termica emessa da un corpo Nero. Nel §6.4 vedremo come invece la Teoria Quantistica di Planck è in grado di risolvere il problema.

6.3 La Legge di Dulong-Petit

Un'altra diretta conseguenza del Teorema di Equipartizione dell'energia, derivato dalla Fisica Statistica Classica, è la legge di Dulong-Petit per il calore specifico dei solidi: considerando i solidi come costituiti da atomi-*oscillatori*, ciascuno dei quali avente 3 gradi di libertà (in corrispondenza alle tre dimensioni dello spazio), si ottiene un'energia *media*:

$$\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathcal{E}}_c + \bar{U} = 3 \cdot \frac{KT}{2} + 3 \cdot \frac{KT}{2} = 3KT,$$

per ogni atomo-*oscillatore*, ovvero $\bar{E} = \mathcal{N}_A 3KT = 3RT$ per mole, essendo $\mathcal{N}_A \simeq 6.023 \cdot 10^{23}$ il Numero di Avogadro. Il Calore Specifico (molare) risulta quindi costante e uguale a $C = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = 3R \simeq 3 \cdot 1.98 \text{ kcal/mol K} \simeq 6 \text{ kcal/mol K}$, indipendentemente dal solido e dalla sua temperatura, in accordo con la legge empirica verificata in molti casi. Tuttavia era noto che tale legge fallisce completamente quando si considerino solidi *leggeri* (cioè, a basso numero atomico), come il carbonio, e viene comunque meno in generale a basse temperature, dove risulta che i calori specifici tendono a zero:

$$\lim_{T \rightarrow 0} C(T) = 0. \quad (6.9)$$

Anche questo fallimento non può essere spiegato dalla Teoria Classica dell'assorbimento termico, secondo la quale un corpo può assorbire calore con continuità, cioè in quantità arbitrariamente piccole. È proprio qui che la Teoria di Planck si allontana dalla Teoria Classica.

6.4 La Teoria Quantistica dell'Irraggiamento

La soluzione ad entrambi i problemi visti nei due paragrafi precedenti sta proprio nell'assumere che l'energia scambiata o trasmessa attraverso la radiazione possa variare solo *a salti*, in modo *discreto* e non *continuo*, attraverso *pacchetti* di energia, detti "quanti". Più in dettaglio, Planck propose le seguenti quattro ipotesi:

- Un corpo nero contiene degli oscillatori armonici semplici che possono vibrare con tutte le frequenze possibili;
- la frequenza irradiata da un oscillatore è uguale alla frequenza meccanica;
- l'emissione della radiazione ha luogo a intervalli discreti, e l'ampiezza rimane costante nei periodi di emissione;
- un oscillatore che emette ad una frequenza ν può irradiare solamente in unità, o "quanti" (di energia) $h\nu \equiv \hbar\omega$, dove h è una *costante universale* (e $\hbar = h/2\pi$ è la cosiddetta "costante di Planck ridotta").

L'ultima *ipotesi* è la più rivoluzionaria; essa suppone infatti che l'energia possa essere irradiata solamente in quantità discrete, o pacchetti, e non in quantità variabili con continuità.

Ma vediamo più da vicino come l'ipotesi dei quanti di Planck risolve il problema della radiazione di Corpo Nero. Come già detto nel §6.2, si suppone che questo sia costituito da una gran quantità di oscillatori lineari, detti "atomi", ai quali tuttavia si possono adesso assegnare valori dell'energia di vibrazione solo multipli interi di $h\nu$, cioè: $0, h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots$. Siano quindi presenti N_0 oscillatori aventi energia uguale a zero. Dalla Teoria Cinetica dell'equipartizione dell'energia, sappiamo che il numero di oscillatori con energia ϵ è proporzionale al "fattore di Boltzmann"¹:

$$N_0 e^{-\epsilon/KT},$$

per cui il numero di oscillatori con energia $h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots, nh\nu, \dots$ è, rispettivamente, uguale a $N_0 e^{-x}, N_0 e^{-2x}, N_0 e^{-3x}, \dots, N_0 e^{-nx}, \dots$, dove si è posto per semplicità: $x = h\nu/KT$. La somma di tutti questi numeri deve ovviamente essere uguale al numero totale di atomi-oscillatori N ; abbiamo così:

$$\begin{aligned} N &= N_0 + N_0 e^{-x} + N_0 e^{-2x} + \dots + N_0 e^{-nx} + \dots = \\ &= N_0 (1 + y + y^2 + \dots + y^n + \dots) = \frac{N_0}{1 - y} = \\ &= \frac{N_0}{1 - e^{-x}}, \end{aligned}$$

(dove si è posto $y = e^{-x} \equiv e^{-h\nu/KT}$). La quantità totale di energia associata agli $N_0 e^{-x}$ *risuonatori*, ciascuno con energia $h\nu$, è quindi $h\nu \cdot N_0 e^{-x}$, quella associata agli $N_0 e^{-2x}$ oscillatori con energia $2h\nu$, è $2h\nu \cdot N_0 e^{-2x}$, e così via; cosicchè, sommando l'energia di tutti i risuonatori presenti aventi frequenza di oscillazione ν si ottiene:

$$\begin{aligned} E &= 0 \cdot N_0 + h\nu \cdot N_0 e^{-x} + 2h\nu \cdot N_0 e^{-2x} + \dots + nh\nu \cdot N_0 e^{-nx} + \dots = \\ &= h\nu N_0 e^{-x} \left(1 + 2e^{-x} + 3e^{-2x} + \dots + ne^{-(n-1)x} + \dots \right) = \\ &= h\nu N_0 e^{-x} (1 + 2y + 3y^2 + \dots + ny^{n-1} + \dots) = \\ &= \frac{h\nu N_0 e^{-x}}{(1 - y)^2} = \frac{h\nu N_0 e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}, \end{aligned}$$

dove si sono usati i seguenti risultati:

¹Si veda, per esempio, M. Born, *Fisica Atomica*, Boringhieri, o E. Fermi, *Termodinamica*, Boringhieri.

$$\sum_{k=0}^{\infty} y^k = \frac{1}{1-y},$$

e, per derivazione membro a membro:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} k y^{k-1} &= 1 + 2y + 3y^2 + \dots + n y^{n-1} + \dots = \\ &= \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{1-y} \right) = \frac{1}{(1-y)^2}. \end{aligned}$$

Quindi, essendo: $N = N_0/(1 - e^{-x})$, si ottiene la Formula di Planck:

$$E = \frac{h\nu N(1 - e^{-x}) e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} = \frac{N h \nu}{e^x - 1} = \frac{N h \nu}{e^{h\nu/KT} - 1},$$

da cui deduciamo che l'energia media per ogni atomo-risunatore di frequenza ν è:

$$\bar{E} = \frac{E}{N} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/KT} - 1}. \quad (6.10)$$

Notare che nel limite in cui la costante di Planck tende a zero, ovvero a temperature *elevate*: $KT \gg h\nu$, ritroviamo il risultato *classico*:

$$\lim_{\frac{h\nu}{KT} \rightarrow 0} \bar{E} \simeq \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{KT} + \dots - 1} \simeq KT$$

(dove si è usato lo sviluppo in serie della funzione esponenziale: $e^x \simeq 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \dots$).

Per ottenere quindi la formula definitiva relativa alla *legge di distribuzione* dell'energia di Planck si deve moltiplicare l'energia media (6.10) di ogni oscillatore per il numero effettivo di oscillatori con una data frequenza contenuti nell'unità di volume, eq.(6.6):

$$dE = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu \cdot \bar{E} = \frac{8\pi h\nu^3 d\nu}{c^3 (e^{h\nu/KT} - 1)} = u_\nu d\nu. \quad (6.11)$$

Questa volta non si ottiene l'assurdo risultato della *catastrofe ultravioletta*, eq.(6.7), e l'energia totale non diverge, dando un risultato finito, perfettamente in accordo coi dati sperimentali e con la legge di Wien-Boltzmann data nell'eq.(6.8):

$$\begin{aligned} E &= \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/KT} - 1} = \\ &= \frac{8\pi (KT)^4}{c^3 h^3} \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}}_{\pi^4/15} = \frac{8\pi K^4 T^4}{c^3 h^3} \cdot \frac{\pi^4}{15}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

ovvero:

$$E = \left(\frac{8 \pi^5 K^4}{15 c^3 h^3} \right) T^4 = \alpha T^4 \equiv \frac{4\sigma}{c} T^4, \quad (6.13)$$

fornendo quindi una spiegazione per il valore osservato della costante di Stefan-Boltzmann $\sigma \simeq 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$, esprimibile in termini delle costanti fondamentali della natura (K , c , h).

Si potrebbe anche mostrare come la formula di Planck per la distribuzione dell'energia, eq.(6.11), spiega anche la "legge di Spostamento" di Wien data nella (3.30), secondo la quale il massimo di emissione della radiazione emessa da un Corpo Nero si ha in corrispondenza di una lunghezza d'onda che è inversamente proporzionale alla temperatura assoluta:

$$\lambda_{max} T = 0.2898 \text{ K cm}.$$

6.5 Teoria dei Quanti e Calore Specifico dei solidi

Altra difficoltà della Fisica Classica, come si è visto nel §6.3, fu quella relativa al Calore Specifico dei solidi, che secondo la legge di Dulong-Petit sarebbe dovuto essere indipendente dalla temperatura (oltre che dal particolare solido) e uguale a $C = 3R \simeq 5.98 \text{ kcal/K mol}$. In realtà, come già detto, ciò si verifica abbastanza bene solo a temperature piuttosto alte e per solidi *pesanti*. Infatti, a temperature molto basse si osserva che i calori specifici tendono a zero, eq.(6.9), un risultato che è inspiegabile nel contesto della fisica classica. Vediamo quindi come la teoria dei quanti di Planck, anche in questo caso, fornisce una soddisfacente spiegazione.

Supponiamo che il singolo atomo possa oscillare con una frequenza propria ν ; allora il quanto di energia è $h\nu$ e l'energia media alla temperatura T è data dall'eq.(6.10), cosicché l'energia interna molare del cristallo può essere espressa come:

$$U = \frac{3\mathcal{N}_A h\nu}{e^{h\nu/KT} - 1},$$

(per i tre gradi di libertà degli \mathcal{N}_A atomi contenuti in una mole). Pertanto il Calore molare è:

$$\begin{aligned} C_V &= \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{3\mathcal{N}_A h\nu}{(e^{h\nu/KT} - 1)^2} \left(e^{h\nu/KT} \frac{h\nu}{KT^2} \right) = \\ &= 3\mathcal{N}_A K \frac{\left(\frac{h\nu}{KT} \right)^2 e^{h\nu/KT}}{(e^{h\nu/KT} - 1)^2}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Come ci si dovrebbe aspettare, per alte temperature: $KT \gg h\nu$, (cioè $x = h\nu/KT \ll 1$), ci si riduce alla legge di Dulong-Petit:

$$\begin{aligned}
C_V &= 3\mathcal{N}_A K \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} \simeq \\
&\simeq 3R \frac{x^2(1 + x + \dots)}{(1 + x + \dots - 1)^2} \simeq 3R;
\end{aligned} \tag{6.15}$$

d'altra parte, a basse temperature $KT \ll h\nu$ (cioè $x = h\nu/KT \gg 1$), si ha:

$$C_V \simeq 3R \frac{x^2 e^x}{e^{2x}} = 3R x^2 e^{-x}; \tag{6.16}$$

questa è la ben nota "Formula di Einstein", che correttamente dà il limite voluto:

$$\lim_{T \rightarrow 0} C_V = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3R x^2 e^{-x} = 0. \tag{6.17}$$

Una più attenta analisi dei dati sperimentali rivelò tuttavia che i calori specifici dei solidi tendono a zero alle basse temperature non esponenzialmente, come nella (6.17), ma come T^3 . Quindi alle bassissime temperature la formula di Einstein risulta non corretta, dando valori di C_V più bassi di quelli osservati. L'errore commesso da Einstein per dedurre l'eq.(6.16) sta nell'aver considerato una sola frequenza ν , mentre sarebbe stato lecito aspettarsi che un corpo condensato possieda tutto uno spettro di frequenze. In altre parole, nel modello di Einstein si considerano i singoli atomi del solido (cristallo) come se vibrassero *indisturbati* con oscillazioni armoniche, l'uno indipendentemente dall'altro. Ma questa ipotesi non è evidentemente plausibile, a causa delle interazioni tra gli atomi stessi all'interno del reticolo cristallino. Si dovrebbe quindi non parlare di \mathcal{N}_A atomi del cristallo vibranti con una stessa frequenza, ma piuttosto trattare il sistema *accoppiato* di $3\mathcal{N}_A$ vibrazioni (corrispondenti ai $3\mathcal{N}_A$ gradi di libertà degli \mathcal{N}_A atomi per mole), e scrivere quindi l'energia nella forma:

$$U = \sum_{r=1}^{3\mathcal{N}_A} \frac{h\nu_r}{e^{h\nu_r/KT} - 1},$$

dove ν_r è la frequenza corrispondente a una singola vibrazione. Sarebbe tuttavia piuttosto complicato calcolare questa somma, anche sulla base di qualche modello specifico. Debye² riuscì comunque ad ottenere un'espressione approssimata, basandosi sull'osservazione che le vibrazioni proprie dei singoli atomi del reticolo cristallino che vengono effettivamente osservate sono solo quelle caratterizzate da una lunghezza d'onda molto maggiore della tipica distanza inter-atomica. Con ciò Debye riuscì a dare una valutazione approssimata della somma di cui sopra, sostituendo lo spettro delle vibrazioni proprie dei singoli atomi con lo spettro delle vibrazioni elastiche dell'intero cristallo. Il risultato finale fu un'espressione del calore specifico che aveva il corretto comportamento

²Per maggiori dettagli si veda, per esempio, M. Born, *Fisica Atomica*, Boringhieri, a pag. 318.

alle bassissime temperature, tendendo a zero come $\sim T^3$ come osservato sperimentalmente, anziché in modo esponenziale come previsto dalla formula di Einstein (6.16).

6.6 Stabilità atomica e Modelli Atomici di Thomson e Bohr

Tra tutte le difficoltà incontrate dalle leggi della Fisica Classica, un ruolo particolarmente importante lo ebbero quelle relative all'evidente stabilità della materia stessa. Il modello atomico in voga all'epoca era il cosiddetto Modello a *panettone* (o "plum-cake", per gli inglesi!) dovuto al fisico britannico Thomson. Secondo tale modello l'atomo era essenzialmente costituito da una *pasta* di carica elettrica positiva distribuita uniformemente, disseminata però di un numero opportuno di cariche elettriche negative pressoché puntiformi, gli elettroni, che rendevano l'intero atomo elettricamente neutro. Come previsto dalle leggi dell'elettromagnetismo, essendo questi elettroni soggetti ad un campo elettrico linearmente crescente con la distanza dal centro dell'atomo³, si sarebbero dovuti muovere quindi di moto armonico con frequenze calcolabili. Il problema è che a causa della loro accelerazione, gli elettroni avrebbero dovuto irraggiare con continuità onde elettromagnetiche, come previsto dalle equazioni di Maxwell; la conseguente perdita di energia, alla fine, li avrebbe quindi fatti cadere sul nucleo stesso, rendendo instabile la materia, contrariamente a quanto viene osservato. Un semplice calcolo farebbe in effetti prevedere un tipico *tempo di decadimento* dell'atomo dell'ordine di soli 10^{-10} s! Vediamo i dettagli di questo problema: secondo l'elettrodinamica classica una carica elettrica e soggetta ad una accelerazione a irraggia energia con una potenza⁴ pari a:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} |a|^2,$$

per cui, essendo l'energia $E = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$ e l'accelerazione $a = \omega^2 r$, si può dedurre che il tipico "tempo di decadimento" atomico sia:

$$\tau = \frac{E}{dE/dt} = \frac{m \omega^2 r^2 / 2}{\frac{2e^2}{3c^3} (\omega^2 r)^2} = \frac{3 m c^3}{4 e^2 \omega^2} = \frac{3 m^2 c^3}{4 K_0 e^4} r^3,$$

dove si è sfruttata la condizione di equilibrio tra la forza elettrica di Coulomb (5.41) e quella centrifuga: $m \omega^2 r = K_0 e^2 / r^2$. Sostituendo i valori numerici per la massa dell'elettrone $m \simeq 9 \cdot 10^{-31}$ kg, la sua carica elettrica $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, la velocità della luce $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, e il tipico raggio atomico $r \sim 10^{-10}$ m, si ottiene il risultato preannunciato di $\tau \sim 10^{-10}$ s! Evidentemente, il modello atomico "a panettone" ...*fa acqua* da tutte le parti!

³Questo risultato, facilmente ottenibile applicando il Teorema di Gauss, è del tutto simile a quanto ottenuto (eq.(2.176)) per il campo gravitazionale *interno* alla Terra nel §2.9.1.

⁴Si veda, per esempio, "La Fisica di Berkeley" (vol. 3), pag. 380.

Altro serio indizio di quanto fosse sbagliato tale modello arrivò dagli esperimenti effettuati in quegli stessi anni da un altro fisico britannico, Ernest Rutherford, che dette poi il nome al modello atomico che soppiantò quello di Thomson. Rutherford fece incidere un fascio collimato di particelle α (nuclei di elio) su un sottile foglio di oro. Secondo il vecchio modello di Thomson, a causa della repulsione elettrostatica tra queste particelle e la carica positiva distribuita uniformemente all'interno dell'atomo, si sarebbero dovuti osservare solo piccoli angoli di deflessione (angoli tra la direzione del fascio emergente e quella del fascio incidente). Ciò che invece Rutherford osservò è che, occasionalmente, qualche particella α subiva grandi deflessioni, anzi, talvolta arrivava addirittura a tornare *indietro*! Un fatto assolutamente inspiegabile nel contesto del Modello atomico di Thomson. L'unica soluzione a questo dilemma fu di ipotizzare la presenza di un *nucleo* atomico positivo, piccolissimo (dell'ordine di 10^{-5} volte le dimensioni dell'atomo stesso), dove è concentrata la quasi totalità della massa atomica. Il risultato fu appunto il Modello di Rutherford, secondo il quale gli atomi si possono considerare come piccoli *sistemi planetari*, col nucleo circondato da elettroni in moto circolare uniforme, proprio come i pianeti attorno al Sole, rivelando un atomo essenzialmente vuoto, le cui dimensioni dipenderebbero quindi dal raggio delle orbite degli elettroni più esterni. Naturalmente però, questo non risolve di per sé il problema della stabilità atomica esposto in precedenza, visto che anche in questo modello gli elettroni sono accelerati e pertanto dovrebbero irraggiare continuamente, perdendo energia e cadendo quindi sul nucleo con un moto a spirale. Tra l'altro, con il progressivo ridursi del raggio dell'orbita, varierebbe anche la frequenza stessa del moto, e quindi anche della radiazione emessa, rendendo impossibile la comprensione degli spettri di emissione costituiti da *righe spettrali* corrispondenti a frequenze ben definite, caratteristiche di ciascun elemento chimico. I tentativi di evitare queste difficoltà modificando la natura delle forze agenti nell'atomo o modificando il suo stesso modello risultarono vani. E non sarebbe potuto essere altrimenti, visto che le discrepanze tra teoria e quanto osservato sperimentalmente avevano la loro origine proprio nei principi fondamentali della meccanica atomica stessa. Il problema, pertanto, era quello di trovare nuove leggi meccaniche ed elettromagnetiche che potessero essere applicate a sistemi dinamici di dimensioni atomiche; leggi che costituiscono la cosiddetta "Meccanica Quantistica".

La costruzione di queste nuove teorie avvenne per gradi. La prima tappa fu la teoria di Bohr-Sommerfeld, esposta nel 1913, che pur ammettendo la validità nell'ambito atomico di alcune delle leggi classiche, ne escludeva altre, sostituendole con opportuni *postulati*, introdotti a priori. Questa teoria *provvisoria*, nonostante l'insoddisfazione generata dalla mancanza di rigorose basi formali, ebbe un grande sviluppo negli anni che vanno dal 1913 al 1925, anno, quest'ultimo, che segnò la nascita della moderna "Meccanica Quantistica".

Vediamo quindi più da vicino in cosa consiste il semplice modello atomico di Bohr. Come abbiamo già detto, sperimentalmente era ben noto che lo spettro dell'idrogeno atomico è costituito da *righe* situate parte nel visibile, parte nell'infrarosso, e parte nell'ultravioletto. Questo spettro è stato il primo a trovare

6.6. STABILITÀ ATOMICA E MODELLI ATOMICI DI THOMSON E BOHR 155

spiegazione attraverso una semplice legge *empirica*. Questa ci dice che le frequenze (e quindi i *numeri d'onda* $\tilde{\nu} = \nu/c = 1/\lambda$) corrispondenti alle suddette righe spettrali si possono tutte ottenere dalla formula (di Rydberg):

$$\tilde{\nu} = R_H \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (6.18)$$

dove $R_H = 109678 \text{ cm}^{-1}$ è la “costante di Rydberg” ed n, n' sono numeri interi arbitrari (con $n > n' > 0$). Le righe di questo spettro si raggruppano in *serie*, ciascuna corrispondente ad un certo valore di n' . Le prime sono le seguenti:

$$\begin{aligned} n' = 1, \quad n = 2, 3, 4, \dots; & \text{serie di Lyman (ultravioletto),} \\ n' = 2, \quad n = 3, 4, 5, \dots; & \text{serie di Balmer (visibile),} \\ n' = 3, \quad n = 4, 5, 6, \dots; & \text{serie di Paschen (infrarosso),} \\ n' = 4, \quad n = 5, 6, 7, \dots; & \text{serie di Brackett (infrarosso).} \end{aligned}$$

Dalla (6.18) risulta anche che al tendere all'infinito di n , ciascuna serie di righe tende ad addensarsi, con un numero d'onda *limite* uguale a R_H/n'^2 .

L'interpretazione teorica di questi risultati, data per la prima volta da Niels Bohr nel 1913, fu il primo passo verso la costruzione di quella meccanica atomica adatta a spiegare il modello di atomo “planetario” risultato dall'analisi degli esperimenti di Rutherford.

Ispirandosi alla Teoria dei Quanti di luce di Planck, introdotti come si è visto per spiegare la radiazione di corpo nero, Bohr introdusse i seguenti due postulati:

- per un sistema atomico, e più in generale per un sistema capace di oscillazioni, c'è una serie di livelli energetici E_n , detti *stati stazionari*, nei quali il sistema può esistere senza bisogno di irraggiare energia sotto forma di onde elettromagnetiche; l'irraggiamento (o l'assorbimento) è prodotto solo dalla transizione da uno di questi livelli ad un altro energeticamente *più basso* (o *più alto*).
- la frequenza della luce emessa o assorbita durante una transizione è determinata esclusivamente dalla differenza delle energie E_{n_1} ed E_{n_2} che caratterizzano i due livelli:

$$h\nu = |E_{n_1} - E_{n_2}|, \quad (6.19)$$

dove $h = 6.67 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$ è la *costante di Planck*.

A questi due postulati Bohr aggiunse una “condizione supplementare” e il cosiddetto “principio di corrispondenza”:

- Condizione Supplementare: il modulo del momento angolare dell'elettrone nel suo moto attorno al nucleo deve essere un multiplo intero della costante universale $h/2\pi = \hbar$, detta h “*tagliato*”; (questa condizione avrà una semplice interpretazione nel contesto della meccanica ondulatoria, dove,

allo scopo di avere *onde stazionarie*, le *onde* associate all'elettrone devono essere tali che la circonferenza dell'orbita sia uguale ad un numero intero di lunghezze d'onda: $2\pi r_n = n\lambda = nh/mv$).

- Principio di Corrispondenza: la teoria quantistica deve ridursi a dare le stesse predizioni della corrispondente teoria classica nel limite $\hbar \rightarrow 0$, limite in cui dovremmo ritrovare le leggi ordinarie della *macrofisica*.

Premesso ciò cominciamo a calcolare i raggi delle orbite (circolari) elettroniche per gli atomi idrogenoidi, cioè quelli costituiti da un nucleo di carica Ze circondati da un solo elettrone (gli altri $Z-1$ si presume siano stati precedentemente tolti). L'equilibrio tra la forza centrifuga cui è sottoposto l'elettrone nel suo moto circolare attorno al nucleo e quella attrattiva di Coulomb implica:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{K_0 Z e^2}{r^2}. \quad (6.20)$$

L'energia cinetica dell'elettrone risulta pertanto:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{K_0 Z e^2}{2r}.$$

Quindi, poiché l'energia potenziale dovuta all'interazione coulombiana è

$$U = -\frac{K_0 Z e^2}{r},$$

per l'energia meccanica si ottiene:

$$E = E_c + U = -\frac{K_0 Z e^2}{2r}; \quad (6.21)$$

il valore negativo dell'energia ci conferma semplicemente che si tratta di uno *stato legato*, cioè che per *ionizzare* l'atomo, è necessario fornirgli energia.

A questo punto Bohr si distaccò dalla teoria classica applicando la sua "condizione supplementare", affermando cioè che le sole orbite elettroniche permesse sono quelle per le quali il momento angolare è un multiplo intero dell'unità \hbar :

$$m v r_n = n \hbar, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (6.22)$$

Usando questa relazione nella (6.20) si ottengono quindi i *raggi*⁵ delle orbite permesse:

$$m^2 v^2 = \frac{K_0 m Z e^2}{r_n} = \left(\frac{n \hbar}{r_n}\right)^2 \Rightarrow r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{K_0 m Z e^2}. \quad (6.23)$$

Per l'atomo di idrogeno ($Z=1$), per esempio, $r_n = n^2 \cdot 0.529 \cdot 10^{-8}$ cm; quindi, per $n=1$: $r_1 = 0.529 \cdot 10^{-8}$ cm, che rappresenta il raggio dell'orbita *fondamentale*.

⁵detti "raggi di Bohr".

Calcoliamoci ora le energie che corrispondono a queste orbite permesse (6.23), i cosiddetti “livelli energetici” del modello di Bohr. Dalla (6.21) si ottiene:

$$E_n = -\frac{K_0^2 m Z^2 e^4}{2 \hbar^2 n^2} = -\frac{R h c}{n^2} Z^2, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (6.24)$$

dove si è posto

$$R = \frac{K_0^2 m e^4}{4\pi \hbar^3 c}. \quad (6.25)$$

Il risultato fondamentale di quanto si è visto è il fatto che la meccanica atomica di Bohr, a differenza della ordinaria meccanica classica (newtoniana), concede all'atomo soltanto determinati valori dell'energia: $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$, detti *livelli energetici*. Quando l'elettrone dell'atomo (di idrogeno) passa dall'orbita quantica n -esima di energia E_n all'orbita n' di energia $E_{n'}$, l'atomo, come previsto dal secondo postulato di Bohr, emette (se $n > n'$) o assorbe (se $n' > n$) un “quanto di luce” (o *fotone*) di frequenza $\nu_{nn'}$ data dalla (6.19), ovvero:

$$\nu_{nn'} = \frac{|E_n - E_{n'}|}{h} = R c \left| \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right|,$$

che è esattamente quanto previsto dalla formula (6.18). Sostituendo i valori numerici delle costanti fondamentali, si ottiene per R il valore:

$$R = 109761 \text{ cm}^{-1},$$

in buon accordo col valore sperimentale della Costante di Rydberg R_H dato in precedenza.

Tale successo rese alla teoria di Bohr (e alla teoria dei quanti in generale) quel riconoscimento universale che si andò attenuando soltanto con gli sviluppi successivi e definitivi della Meccanica Quantistica. Da un punto di vista sperimentale la conferma definitiva dell'esistenza degli stati quantici di un atomo, ovvero dei suoi “livelli energetici” venne con gli esperimenti di Franck ed Hertz (1913). Essi studiarono l'eccitazione degli atomi di un gas causata da urti con elettroni di energia e velocità note. Osservando le conseguenti energie perse dagli elettroni, energie evidentemente assorbite dagli atomi stessi durante l'urto, si accorsero che queste variavano in modo *discreto*, e che coincidevano proprio con le energie di eccitazione atomica già note dalla spettroscopia.

6.7 L'Effetto Fotoelettrico

L'effetto fotoelettrico, scoperto per caso da Hertz nel 1887, consiste nell'emissione di elettroni (detti, per l'appunto, *fotoelettroni*) da parte di alcuni metalli e anche di qualche gas, quando questi sono investiti da una radiazione di frequenza sufficientemente elevata, tipicamente raggi *UV*, *X* o γ . Le leggi principali che lo descrivono sono le seguenti:

- l'effetto stesso (e quindi l'emissione dei *fotoelettroni*) si ha soltanto se la frequenza della radiazione incidente è maggiore di un valore ben definito (ν_0), detta *frequenza di soglia*, dipendente solo dalla natura del corpo *illuminato*;
- i fotoelettroni emessi hanno velocità che variano da zero ad un certo valore massimo v_m , corrispondente ad una energia cinetica che è linearmente crescente con la frequenza della radiazione incidente:

$$E_c(max) \equiv \frac{1}{2} m v_m^2 = h(\nu - \nu_0),$$

(“Legge di Einstein”), dove h è una costante uguale per tutti i corpi, che risulta essere proprio la “costante di Planck”;

- la densità della corrente foto-elettronica, ovvero il numero di elettroni emessi al secondo per unità di superficie, è direttamente proporzionale all'intensità dell'illuminamento (a parità di frequenza); intensità che peraltro non influenza affatto la loro velocità.

Le leggi classiche dell'elettromagnetismo danno tuttavia un'interpretazione dell'effetto fotoelettrico che è in contrasto con quanto osservato sperimentalmente. In particolare, interpretando i fotoelettroni come elettroni estratti dagli atomi in conseguenza delle oscillazioni indotte dai campi elettrici della radiazione incidente, essi dovrebbero avere velocità (e quindi energie cinetiche) crescenti con l'intensità di quest'ultima (a parità di frequenza), contrariamente a quanto viene osservato. Come è ben noto la spiegazione fu trovata da Einstein nel 1905, lo stesso anno in cui propose la Teoria della Relatività Ristretta, osservando che la *costante* h caratteristica dell'effetto fotoelettrico coincideva proprio (entro l'errore sperimentale) con quella introdotta da Planck per spiegare la radiazione emessa da un corpo nero. In particolare, egli ipotizzò non solo che l'energia della radiazione fosse emessa in *quanti* discreti di energia $h\nu$, ma che si propagasse proprio in “corpuscoli”, da lui definiti appunto *quanti di luce* e oggi noti come *fotoni*. Questi urterebbero anelasticamente con gli elettroni atomici, causandone l'estrazione e spiegando quindi la *fotoemissione* osservata, proprio come se fossero particelle materiali a tutti gli effetti. Ciò rivelò pertanto il cosiddetto *dualismo* ondulatorio-corpuscolare della luce. Dualismo che costituisce proprio uno dei principi fondanti della Nuova Meccanica (detta “Quantistica”) e che risulta vero anche se considerato in senso inverso, visto che anche le cosiddette “particelle materiali”, come gli elettroni, i protoni, etc., riflettono questo comportamento *ibrido*, interagendo a volte come corpuscoli e altre come onde.

6.8 L'Effetto Compton

Per certi aspetti, simile a quello fotoelettrico è l'effetto Compton. Questo fenomeno, scoperto nel 1923 dall'omonimo scienziato inglese, costituisce ancora un esempio di effetto che può essere interpretato correttamente grazie all'ipotesi

dei quanti di luce. Questa volta si tratta della diffusione di raggi- X e γ da parte di gas o liquidi. Ciò che si osserva è la variazione della lunghezza d'onda della radiazione diffusa rispetto a quella della radiazione incidente, secondo una legge quantitativa ben definita; legge che come vedremo, può essere dedotta e spiegata interpretando il fenomeno in termini di urti "elastici" tra i *fotoni* incidenti e gli elettroni atomici, assunti inizialmente in quiete. Questa volta il fotone non *scompare*, ma viene diffuso ad un certo angolo θ rispetto alla direzione incidente (l'elettrone viene invece *scatterato* ad un altro angolo ϕ).

Vediamo come dedurre la legge dell'effetto Compton applicando gli usuali principi di conservazione della quantità di moto e dell'energia, esattamente come in un ordinario urto elastico tra corpuscoli⁶. Assumendo una quantità di moto per il fotone pari a $p = E/c = h\nu/c = h/\lambda$, e utilizzando le formule relativistiche⁷ per l'energia e l'impulso dell'elettrone, possiamo scrivere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \theta + \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}} \cos \phi, \\ 0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \theta - \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}} \sin \phi, \\ h\nu + mc^2 = h\nu' + \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{cases} \quad (6.26)$$

Quadrando e sommando le prime due equazioni si ha:

$$\left(\frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)^2 = \left(\frac{h}{c} \right)^2 \{ (\nu - \nu' \cos \theta)^2 + (\nu' \sin \theta)^2 \},$$

da cui:

$$\frac{m^2 v^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = h^2 (\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu' \cos \theta),$$

mentre dalla terza delle eq.(6.26) si ha:

$$\begin{aligned} \frac{m^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} &= \{ h(\nu - \nu') + mc^2 \}^2 = \\ &= h^2 (\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu') + m^2 c^4 + 2m c^2 h(\nu - \nu'). \end{aligned} \quad (6.27)$$

Sottraendo quindi queste ultime due equazioni otteniamo, con un po' di algebra:

$$\begin{aligned} \frac{m^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{m^2 v^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} &= m^2 c^4 = \\ &= h^2 [-2\nu\nu'(1 - \cos \theta)] + m^2 c^4 + 2m c^2 h(\nu - \nu'), \end{aligned} \quad (6.28)$$

⁶Gli urti elastici sono stati studiati nel §2.7.2.

⁷M. Born, *Fisica Atomica*, Zanichelli, pag. 447.

ovvero:

$$h\nu\nu'(1 - \cos\theta) = mc^2(\nu - \nu'),$$

ed in definitiva, essendo $\lambda = c/\nu$ e $\lambda' = c/\nu'$ le lunghezze d'onda del fotone incidente e di quello diffuso :

$$\Delta\lambda \equiv \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos\theta). \quad (6.29)$$

La costante $\lambda_0 = h/(mc) = 0.02426 \text{ \AA}$ è detta “lunghezza d'onda Compton”. Notare che la massima variazione di lunghezza d'onda ($= 2h/mc$) si ha per i fotoni che tornano esattamente indietro ($\theta = \pi$). La formula (6.29) risulta essere in perfetto accordo coi risultati sperimentali, fornendo quindi un'ulteriore conferma della correttezza dell'ipotesi dei “quanti di luce” di Planck-Einstein.

6.9 Onde di de Broglie ed equazione di Schrödinger

Come abbiamo visto, le difficoltà connesse con la radiazione di corpo nero, il calore specifico dei solidi, gli effetti fotoelettrico e Compton e le righe spettrali degli atomi, portarono all'ipotesi dei “quanti” di luce. Secondo questa idea rivoluzionaria la luce, solitamente vista solo sotto forma di *onde* elettromagnetiche, si comporta talvolta come costituita da “corpuscoli”: i cosiddetti *fotoni*, particelle che seppur con massa nulla, sono caratterizzati sia da un'energia $E = h\nu$ che da una quantità di moto $p = h\nu/c = h/\lambda \equiv E/c$, proprio come le usuali particelle materiali.

Ancora più sorprendente fu l'osservazione della *diffrazione*, fenomeno tipicamente di carattere *ondulatorio*, ottenuta facendo incidere su un cristallo un fascio di elettroni. Questa serie di esperimenti, effettuati da Davisson e Germer negli anni '20 del secolo scorso, rivelò che anche la cosiddetta materia si comporta talvolta come un'onda! ...proprio come talvolta la luce si comporta come un corpuscolo. In altre parole, nel mondo microscopico tipico della fisica atomica e subatomica, i familiari concetti di *corpuscolo* e *onda* non possono più essere distinti in modo netto, dando luogo a ciò che, utilizzando uno sfortunato termine talvolta usato in passato nella letteratura scientifica, viene detto “*particonda*”. Pertanto, così come si associa una quantità di moto ad un fotone, così dobbiamo associare un'onda ad un elettrone. In particolare, assumendo la stessa relazione tra la lunghezza d'onda e la quantità di moto valida per i fotoni, il fisico francese Louis de Broglie ipotizzò quindi che ad ogni particella di impulso $p (= mv)$, nel caso *non-relativistico*, con $v \ll c$) corrispondesse un'onda di lunghezza d'onda:

$$\lambda = \frac{h}{p} \equiv \frac{h}{mv}; \quad (6.30)$$

fu l'inizio della cosiddetta “*Meccanica Ondulatoria*”, i cui principali artefici furono proprio lo stesso de Broglie, insieme a Schrödinger, Born e Dirac.

In effetti, la vecchia teoria quantistica basata sui quanti di Planck e sui modelli atomici di Bohr-Rutherford era sempre stata ritenuta *provvisoria*, per la sua

incongruenza logica e la sua incompletezza, ma anche per la sua incapacità di spiegare fenomeni come l'effetto Zeeman e i momenti magnetici atomici. La nuova teoria, detta Meccanica Quantistica, oltre che come "Meccanica Ondulatoria", si sviluppò quasi simultaneamente anche sotto un'altra forma, detta "Meccanica Matriciale", ad opera di Heisenberg e Jordan. Le due forme, pur distinte, risultano tuttavia essere equivalenti. Nei §§6.9 e 6.10 ci occuperemo, seppur brevemente, solo della *Meccanica Ondulatoria* di Schrödinger.

Conseguenza fondamentale del comportamento *ibrido* ondulatorio-corpuscolare della materia è il "Principio di Indeterminazione" di Heisenberg. Poiché in generale non è possibile localizzare un'onda con una incertezza inferiore alla sua lunghezza d'onda, la relazione di de Broglie (6.30) può essere considerata equivalente a dire che il prodotto delle incertezze associate alla posizione spaziale e all'impulso di una qualsiasi particella non può mai essere inferiore alla costante di Planck; essenzialmente, questo è proprio quanto afferma il *Principio* di Heisenberg, secondo il quale deve valere la seguente relazione tra le due incertezze:

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (6.31)$$

Questo *principio* ha conseguenze importanti, non solo *fisiche*, ma anche *filosofiche*, perché distrugge uno dei pilastri della fisica classica newtoniana: il "determinismo", cioè l'idea che, almeno in linea di principio, sia sempre possibile *misurare* e quindi conoscere simultaneamente e con assoluta certezza sia la posizione x che la relativa componente della quantità di moto p_x di una particella. A prima vista, si potrebbe pensare che ciò rifletta soltanto l'inadeguatezza dei nostri apparati strumentali, ma non è così. Secondo la corrente interpretazione delle leggi quanto-meccaniche, l'incertezza, o meglio l'indeterminazione, di queste grandezze fisiche⁸ è una caratteristica intrinseca dei sistemi microscopici e non può essere eliminata o evitata perfezionando le nostre apparecchiature sperimentali.

Vediamo come possiamo ottenere in modo piuttosto informale l'equazione del moto di una particella secondo le leggi della meccanica quantistica. Come abbiamo visto nei precedenti paragrafi, i fotoni possono essere considerati gli "*atomi*" del campo elettromagnetico. Le equazioni fondamentali che descrivono questo campo sono le ben note equazioni di Maxwell, date in (5.121). Come si è visto nel §(5.11), in assenza di cariche e correnti elettriche, cioè nel vuoto, queste equazioni implicano che sia il campo elettrico che quello magnetico soddisfino l'equazione caratteristica delle onde, l'equazione di D'Alembert (5.123):

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0,$$

dove $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \simeq 3 \cdot 10^8$ m/s è la velocità della luce. La sua soluzione generale scritta in forma complessa è stata data nell'eq.(5.129):

⁸Più in generale, si può dimostrare che sussiste una *relazione di indeterminazione* del tipo (6.31) non solo per la posizione e la quantità di moto di una particella, ma per ogni coppia di grandezze "coniugate", per esempio, per la sua *energia* (ΔE) ed il *tempo* (Δt).

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)},$$

dove \mathbf{k} è il vettore d'onda, diretto nella direzione di propagazione e avente modulo $|\mathbf{k}| = k = 2\pi/\lambda$, e $\omega = 2\pi\nu$ ne è la pulsazione. Usando per l'energia e la quantità di moto del fotone le espressioni dedotte in precedenza: $\mathcal{E} = h\nu \equiv \hbar\omega$ e $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{k}}\mathcal{E}/c = \hat{\mathbf{k}}h/\lambda = \mathbf{k}\hbar$, questa soluzione assume la forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - \mathcal{E}t)/\hbar}. \quad (6.32)$$

Seguendo de Broglie, supporremo che anche ad ogni particella⁹ di impulso $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ sia associata un'onda (come quella del fotone) di lunghezza¹⁰ $\lambda = h/mv = h/p$; onda per la quale dovremo dare un'appropriata interpretazione fisica. Detta ψ tale “funzione d'onda”, per una particella *libera* (cioè non soggetta a forze esterne) questa dovrà pertanto assumere la stessa forma dell'eq.(6.32):

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - \mathcal{E}t)/\hbar}. \quad (6.33)$$

Da questa soluzione, per derivazione rispetto alle coordinate spaziali e al tempo, troviamo che:

$$\nabla\psi = i\frac{\mathbf{p}}{\hbar}\psi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}\psi = -i\hbar\nabla\psi, \quad (6.34)$$

come pure:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}\psi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}; \quad (6.35)$$

in altre parole, la *moltiplicazione* da sinistra dell'impulso \mathbf{p} e dell'energia \mathcal{E} sulla funzione d'onda ψ , è equivalente all'applicazione dei rispettivi “operatori derivata”:

$$\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar\nabla, \quad (6.36)$$

$$\mathcal{E} \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}. \quad (6.37)$$

A questo punto, usando la familiare relazione tra l'energia meccanica \mathcal{E} , la quantità di moto \mathbf{p} e l'energia potenziale U di una particella (non relativistica): $\mathcal{E} = p^2/2m + U$, con la *sostituzione* (6.36) si ottiene:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + U\psi = \mathcal{E}\psi, \quad (6.38)$$

ovvero:

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(\mathcal{E} - U)\psi = 0. \quad (6.39)$$

⁹In questa sede ci limitiamo al caso *non-relativistico*.

¹⁰Naturalmente, $v = |\mathbf{v}|$ e $p = |\mathbf{p}|$.

Queste sono le due forme più note dell'equazione di Schrödinger, detta *degli stati stazionari*, poiché non vi compare il tempo. Per ottenere quindi l'equazione completa, dipendente dal tempo, è sufficiente effettuare anche la *sostituzione* (6.37):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (6.40)$$

Queste equazioni descrivono completamente il comportamento quanto-meccanico della particella, esattamente come fanno le equazioni di Newton nella meccanica *classica*.

Ma se nel caso del fotone il significato di “funzione d’onda” può essere compreso in termini di *vettore campo elettrico* o *magnetico* (in realtà del *4-vettore potenziale* A^μ)¹¹, nel caso di una qualsiasi altra particella elementare, come l’elettrone o il protone, qual’è il significato fisico della sua funzione d’onda? Come dimostreremo in questo paragrafo, e seguendo l’interpretazione dovuta al fisico Max Born, il *modulo quadro* $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ rappresenta la “*Densità di Probabilità*”, nel senso che:

$$|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV \equiv \psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) dV, \quad (6.41)$$

è la “probabilità” che la particella sia nel volumetto dV (individuato dai raggi vettori \mathbf{r} e $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$) all’istante t . Questo significa, evidentemente, che la funzione d’onda stessa deve soddisfare la cosiddetta “condizione di normalizzazione”, che ci assicura la certezza della presenza della particella in tutto lo spazio:

$$P_{\text{tot}} = \int_{V_\infty} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV = 1. \quad (6.42)$$

Cerchiamo di capire perché la quantità $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ è interpretabile come una “densità”. Cominciamo col moltiplicare l’equazione di Schrödinger dipendente dal tempo (6.40) per la funzione d’onda complessa coniugata ψ^* e, analogamente, moltiplichiamo l’equazione complessa coniugata della (6.40) per ψ :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi^* \nabla^2 \psi + U \psi^* \psi = i\hbar \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (6.43)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi \nabla^2 \psi^* + U \psi^* \psi = -i\hbar \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}; \quad (6.44)$$

facendo la differenza membro a membro di queste due equazioni si arriva a:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^* \psi) + \nabla \cdot \left[\frac{i\hbar}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) \right] = 0, \quad (6.45)$$

dove si è usata l’identità:

$$(\psi \nabla^2 \psi^* - \psi^* \nabla^2 \psi) = \nabla \cdot (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi).$$

¹¹Vedi Nota (20) del Capitolo 5.

L'eq.(6.45) ha la stessa forma dell'*equazione di continuità* (5.92) dedotta nel §5.8 nell'ambito dell'elettromagnetismo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (6.46)$$

in cui ρ indica la densità volumica di carica elettrica e $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ la “densità superficiale di corrente”. Ricordiamo che questa equazione non è che la diretta conseguenza della “Legge di Conservazione della Carica Elettrica”:

$$Q = \int_{V_\infty} \rho dV = \text{costante}. \quad (6.47)$$

L'analogia tra la (6.45) e la (6.46) ci porta ad identificare $\rho = |\psi|^2 = \psi^* \psi$ con una *densità*, in particolare con la *densità di probabilità* di trovare la particella nell'elemento di volume unitario attorno al punto dello spazio considerato; allo stesso modo

$$\mathbf{J} = \frac{i\hbar}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) \quad (6.48)$$

va identificata con la corrispondente *densità di corrente*. La quantità conservata associata all'eq.(6.45) è allora la “probabilità totale” di trovare la particella in tutto lo spazio, che deve essere evidentemente uguale a 1, (come richiesto dall'eq.(6.42)). La correttezza della nostra interpretazione per la densità di corrente \mathbf{J} trova conferma nello studio della funzione d'onda di una particella libera. In questo caso l'equazione di Schrödinger degli stati stazionari (6.39):

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2} \psi = 0,$$

ha la seguente soluzione:

$$\psi(\mathbf{r}) = A e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})/\hbar},$$

dove A è una costante ottenibile con la condizione di normalizzazione (6.42) e $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$ è la quantità di moto della particella. Sostituendo questa espressione nell'eq.(6.48), ed essendo $\rho = |\psi|^2 \equiv |A|^2$ la “densità di probabilità”, si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \frac{i\hbar}{2m} |A|^2 \left\{ e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})/\hbar} \nabla \left(e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})/\hbar} \right) - e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})/\hbar} \nabla \left(e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})/\hbar} \right) \right\} = \\ &= \frac{i\hbar}{2m} |A|^2 \left(-\frac{2i\mathbf{p}}{\hbar} \right) = |A|^2 \frac{\mathbf{p}}{m} \equiv \rho \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (6.49)$$

confermando per \mathbf{J} l'interpretazione di *densità di corrente* associata alla particella.

6.10 Applicazioni dell'equazione di Schrödinger

In questo paragrafo daremo qualche semplice esempio di applicazione dell'equazione di Schrödinger, derivando anche una formula (approssimata) per il “coefficiente di trasmissione” di una particella soggetta ad una generica *barriera di potenziale*.

6.10.1 Particella in orbita circolare

Come prima applicazione consideriamo una particella in moto uniforme su una traiettoria circolare di raggio r . In questo caso possiamo risolvere l'equazione di Schrödinger unidimensionale:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = \mathcal{E} \Psi(x, t) \quad (6.50)$$

col metodo della *separazione delle variabili*, ponendo:

$$\Psi(x, t) = \psi(x) \phi(t);$$

in tal caso l'eq.(6.50) diventa:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \phi(t) \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = i\hbar \psi(x) \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = \mathcal{E} \psi(x) \phi(t), \quad (6.51)$$

ovvero, dividendo per $\Psi(x, t) = \phi(t) \psi(x)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi''}{\psi} = i\hbar \frac{\dot{\phi}}{\phi} = \mathcal{E}. \quad (6.52)$$

Queste sono due semplici equazioni differenziali lineari, le cui soluzioni possono essere scritte in forma esponenziale complessa come segue:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= C_1 e^{i p x / \hbar}, \\ \phi(t) &= C_2 e^{-i \mathcal{E} t / \hbar}, \end{aligned} \quad (6.53)$$

dove $p = \sqrt{2m\mathcal{E}}$ è l'impulso della particella sull'orbita circolare; pertanto, in definitiva, la funzione d'onda *completa* è:

$$\Psi(x, t) = A e^{i(p x - \mathcal{E} t) / \hbar}, \quad (6.54)$$

dove $A = C_1 C_2$ è una costante d'integrazione. A questa soluzione va evidentemente imposta la condizione di *periodicità* sulla circonferenza: $\Psi(x + 2\pi r, t) = \Psi(x, t)$, cioè:

$$A e^{i[p(x+2\pi r) - \mathcal{E}t] / \hbar} = A e^{i(p x - \mathcal{E}t) / \hbar};$$

questa identità implica: $e^{i(p 2\pi r) / \hbar} = 1$, da cui otteniamo la “quantizzazione” del momento angolare $L_n = m v_n r$ della particella:

$$\frac{2\pi r p}{\hbar} = 2\pi n \quad \Rightarrow \quad p_n = m v_n = n \frac{\hbar}{r} \quad \Rightarrow \quad (6.55)$$

$$L_n = m v_n r = n \hbar,$$

dove n è un numero intero positivo, detto “numero quantico”. Di conseguenza, anche l’energia risulta quantizzata, essendo data dai seguenti *livelli discreti*:

$$\mathcal{E}_n = \frac{p_n^2}{2m} = n^2 \frac{\hbar^2}{2m r^2};$$

uno *spettro* di energie simile a quello ottenuto nel caso dell’atomo di Bohr, eq.(6.24). Ciò non deve sorprendervi, visto che la condizione (6.55) ora ottenuta è identica a quella proposta da Bohr, eq.(6.22).

6.10.2 Particella in una buca di potenziale infinita

In questo paragrafo si vuole studiare il problema (unidimensionale) di una particella vincolata a stare in un intervallo dell’asse x di ampiezza assegnata a , diciamo $x \in [0, a]$. Ciò è equivalente a dire che la particella è soggetta ad una forza di potenziale:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } 0 \leq x \leq a, \\ \infty, & \text{per } x < 0 \cup x > a. \end{cases} \quad (6.56)$$

In particolare, vediamo che all’interno della buca di potenziale infinita deve valere l’equazione di Schrödinger per la particella libera:

$$\psi'' + \frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2} \psi = 0, \quad (6.57)$$

con le *condizioni al contorno* fisiche: $\psi(x=0) = \psi(x=a) = 0$, che ci assicurano l’annullamento della funzione d’onda agli estremi dell’intervallo, dove $U \rightarrow \infty$. In questo caso la soluzione che si ottiene, scritta in forma *reale*, è la seguente:

$$\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx),$$

dove $k = \sqrt{2m\mathcal{E}}/\hbar$; la condizione $\psi(x=0) = 0$ implica $B = 0$, mentre l’altra condizione porta a:

$$\psi(x=a) = A \sin(ka) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_n a = n\pi,$$

da cui possiamo dedurre i seguenti *livelli discreti di energia*:

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m a^2}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (6.58)$$

Ad ogni valore definito dell’energia, detto *autovalore*, E_n , corrisponde una ben determinata funzione d’onda:

$$\psi_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad (6.59)$$

dove la costante A va determinata dalla condizione di normalizzazione (6.42):

$$\int_0^a \psi_n^2 dx = A^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = 1,$$

da cui si ottiene: $A = \sqrt{2/a}$.

6.10.3 Particella in una scatola tridimensionale

La generalizzazione al caso tridimensionale di una particella vincolata a muoversi all'interno di una scatola a pareti rigide di dimensioni (a, b, c) è immediata. La corrispondente equazione di Schrödinger può essere ridotta a tre equazioni *unidimensionali* indipendenti e identiche all'eq.(6.57) col metodo della separazione delle variabili. Questo ci permette di generalizzare facilmente i risultati ottenuti nel paragrafo precedente. I livelli di energia, adesso parametrizzati da *tre* numeri quantici, uno per ogni direzione spaziale, sono dati da:

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left\{ \left(\frac{n_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{b}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{c}\right)^2 \right\}, \quad (6.60)$$

a cui corrispondono le seguenti funzioni d'onda (normalizzate):

$$\psi(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{c}\right). \quad (6.61)$$

Poiché ciascuno *stato* è univocamente caratterizzato dall'insieme dei suoi *numeri quantici*, conviene spesso rappresentarlo col simbolo $|n_x, n_y, n_z\rangle$ (detto “ket”¹²).

Talvolta può accadere che un certo numero di *stati* distinti, cioè stati caratterizzati da *set* diversi di numeri quantici, abbiano la stessa energia; in tal caso diremo che tale livello energetico è *degenere*, ed il “grado di degenerazione” è proprio il numero di questi stati. Viene detto livello “fondamentale” quello caratterizzato dall'energia più bassa. Questo livello è sempre *non-degenere*. Per fare un esempio, per una scatola *cubica* di lato a , il livello fondamentale ha un'energia:

$$E_{(0)} = \frac{3\hbar^2 \pi^2}{2m a^2},$$

e corrisponde al solo stato $|1, 1, 1\rangle$, mentre il *primo livello eccitato*, di energia

$$E_{(1)} = \frac{3\hbar^2 \pi^2}{m a^2},$$

¹²Questa *strana* denominazione deriva dalla parola inglese “braket”, che significa *parentesi*, poiché un vettore *ket* $|\dots\rangle$ può essere visto come “metà” della *parentesi* $\langle \dots | \dots \rangle$. L'utilizzo di vettori *bra* $\langle \dots |$ e vettori *ket* $|\dots\rangle$ in Meccanica Quantistica si deve al fisico inglese Dirac; per ulteriori dettagli si veda il suo *Principi della Meccanica Quantistica*, Boringhieri.

è *triplamente* degenerare, corrispondendo ai tre stati distinti $|2, 1, 1\rangle$, $|1, 2, 1\rangle$ e $|1, 1, 2\rangle$.

Per concludere, ricordiamo che se vogliamo inserire un certo numero di elettroni (in generale qualsiasi particella a *spin*¹³ semi-intero) nella nostra *scatola tridimensionale*, dobbiamo rispettare il cosiddetto “Principio di esclusione” di Pauli, secondo il quale non possono esserci più di due particelle aventi lo stesso *set* di numeri quantici (in modo da poterle poi distinguere grazie al loro opposto spin $\pm\hbar/2$).

6.10.4 Barriera di potenziale ed Effetto Tunnel

In questo paragrafo vogliamo studiare il moto di una particella attraverso una “barriera di potenziale”. Secondo la fisica classica di Newton, naturalmente, non ci possono essere dubbi. Se la particella ha un’energia superiore alla massima altezza della barriera, essa attraverserà certamente la barriera stessa, mentre in caso contrario sarà sempre respinta, tornando da dove è venuta. Vedremo invece che le leggi della Meccanica Quantistica prevedono una probabilità non nulla, sia di essere *riflessa* nel primo caso, che di essere *trasmessa* nel secondo. In particolare quest’ultima possibilità, detta “Effetto Tunnel”, può spiegare per esempio il fenomeno legato al decadimento radioattivo in cui una particella α riesce ad attraversare la barriera di potenziale del nucleo *genitore*.

Consideriamo quindi una particella di massa m in moto sull’asse x , proveniente da $x \rightarrow -\infty$, con una energia ed un impulso ben definiti $E = p^2/2m \equiv k^2 \hbar^2/2m$. La barriera di potenziale, supposta per semplicità rettangolare, sia definita dalla:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } x \leq 0 \cup x \geq a, \\ U_0, & \text{per } 0 < x < a, \end{cases} \quad (6.62)$$

con $U_0 > 0$. Poiché siamo interessati all’effetto tunnel, ci limiteremo a studiare il caso in cui l’energia della particella è inferiore all’altezza della barriera: $E < U_0$. In questo caso, l’equazione di Schrödinger valida a destra e a sinistra della barriera è quella della particella libera. Le soluzioni sono pertanto date dalle usuali espressioni oscillatorie; in particolare, a sinistra della barriera la funzione d’onda sarà esprimibile come la sovrapposizione di un’onda *progressiva* di ampiezza unitaria (corrispondente alla particella incidente in moto verso destra) e di un’onda *regressiva* (corrispondente alla particella *riflessa*, in moto verso $\rightarrow -x$):

$$\psi_1(x) = e^{ikx} + A e^{-ikx}, \quad \text{per } x < 0.$$

D’altra parte, l’equazione di Schrödinger valida nella regione della barriera (per $0 \leq x \leq a$) è:

¹³Ricordiamo che lo “spin” di una particella ne caratterizza il momento angolare *intrinseco*, anch’esso quantizzato.

$$\psi_2'' - \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2} \psi_2 = 0,$$

la cui soluzione contiene solo un'esponenziale *reale smorzato*:

$$\psi_2(x) = B e^{-qx}, \quad \text{per } 0 \leq x \leq a,$$

dove si è posto: $q = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar$; (la soluzione esponenzialmente crescente è esclusa perché fisicamente inaccettabile!). L'ampiezza di probabilità di attraversare la barriera sarà proporzionale al rapporto tra la funzione d'onda calcolata alla fine della barriera e quella calcolata al suo inizio:

$$\frac{\psi_2(a)}{\psi_2(0)} \simeq e^{-qa}.$$

Quindi possiamo concludere che la *probabilità* di attraversamento, detta più propriamente “coefficiente di *Trasmissione*”, è data da:

$$T = \left| \frac{\psi_2(a)}{\psi_2(0)} \right|^2 \simeq e^{-2aq} = e^{-2a\sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar}. \quad (6.63)$$

Consideriamo ora una barriera generica, descritta da una qualche funzione continua $U(x)$. Questa può essere, in prima approssimazione, pensata come formata da tante barriere rettangolari, di altezza $U_i \equiv U(x_i)$ e di larghezza $a_i = dx_i$, a ciascuna delle quali corrisponderà un certo coefficiente di trasmissione T_i , dato da un'espressione del tipo (6.63); il coefficiente di trasmissione *globale* (essendo una probabilità!) sarà dato dal loro prodotto:

$$T = \prod_i T_i \quad \Rightarrow$$

$$\ln T = \sum_i \ln T_i = \sum_i -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m\{U(x_i) - E\}} dx_i.$$

Da questa espressione otteniamo quindi la formula generale (ma approssimata) per il coefficiente di trasmissione da una qualsiasi barriera di potenziale $U(x)$:

$$T = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m\{U(x) - E\}} dx\right), \quad (6.64)$$

dove x_1 e x_2 sono i cosiddetti “punti di inversione” *classici*, ovvero i punti in cui l'energia della particella è uguale all'energia potenziale: $U(x_{1(2)}) = E$, e *classicamente* si ha l'inversione dello stato di moto.

Bibliografia

- [1] Richard Feynman, *La Fisica di Feynman*, (4 voll.), Zanichelli.
- [2] D. Halliday e R. Resnick, *Fisica*, (2 voll.), Casa Editrice Ambrosiana.
- [3] "La Fisica di Berkeley", (5 voll.), Zanichelli.
- [4] P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci, *Fisica*, (2 voll.), Edises.
- [5] M. Born, *Fisica Atomica*, Boringhieri.
- [6] E. Fermi, *Termodinamica*, Boringhieri.
- [7] P. Caldirola, *Istituzioni di Fisica Teorica*, Editrice Viscontea.
- [8] S. Ranfone, *Complementi di Analisi Matematica*, (unpublished);
[www.stefano-ranfone.it]

Indice analitico

- accelerazione, 10
- accelerazione centripeta, 11, 15, 22
- accelerazione di Coriolis, 22
- Ampere, (teorema di -), 134
- angolo solido, 111
- approssimazione impulsiva, 43
- Archimede, (forza di -), 102
- attrito dinamico, 19
- attrito statico, 19, 29, 52
- autovalore (dell'energia), 166

- barriera di potenziale, 168
- Biot-Savart, (legge di -), 135
- Bohr, (modello atomico di -), 154
- Bohr, (raggio di -), 122, 156
- Bohr, (*condizione supplementare* di -), 155
- Bohr, (*Principio di Corrispondenza* di -), 156
- Bohr-Sommerfeld, (teoria di -), 154
- Boltzmann, (costante di -), 81, 93, 145
- Boltzmann, (fattore di -), 149
- Boltzmann, (formula dell'entropia), 92
- Born, (interpretazione di -), 163
- buca di potenziale, 166
- Buridano, (teoria dell'*impetus* di -), 34

- calore, 65
- calore latente, 67
- calore specifico, 66
- calore specifico dei solidi, 148, 151
- campo elettrico, 117
- campo gravitazionale, 26, 115
- campo magnetico, 132
- campo scalare, 111
- campo vettoriale, 111
- capacità di un condensatore, 128

- capacità termica, 66
- capacità termica molare a pressione costante, 85
- capacità termica molare a volume costante, 82, 84
- capacità, (coefficienti di -), 127
- carica elettrica *elementare*, 117
- Carnot, (ciclo di -), 88
- Carnot, (teorema di -), 96, 97
- catastrofe ultravioletta, 147
- centro di massa, 31
- cinematica, 9
- circuitazione, 36, 112
- Clausius, (disuguaglianza di -), 90
- Clausius, (enunciato del 2° Principio), 91
- coefficiente di attrito dinamico, 19
- coefficiente di attrito statico, 19
- coefficiente di trasmissione (da una barriera di potenziale), 169
- Compton, 158
- condensatore, 128
- condensatore cilindrico, 128
- condizione di normalizzazione, 163
- conducibilità elettrica, 130
- conduttori, 126
- conduzione elettrica, 129
- conduzione termica, 69–71
- conservazione del momento angolare, 33, 56
- conservazione dell'energia (totale), 38, 82, 91
- conservazione dell'energia meccanica, 38, 56, 61, 159
- conservazione della quantità di moto, 32, 33, 61, 159
- convezione termica, 72

- coordinata intrinseca, 11
 coordinate cartesiane, 108
 coordinate cilindriche, 110
 coordinate generalizzate, 48
 coordinate polari, 15, 56
 coordinate sferiche, 55, 110, 136
 corpi rigidi, 44
 corpo nero, 74, 145
 corrente di spostamento, 137
 corrente elettrica, (Intensità di -), 130
 costante di gravitazione universale, 24, 115
 costante dielettrica del vuoto, 116
 costante dielettrica relativa, 116
 costante elastica di una molla, 19
 costante universale dei gas perfetti, 80
 Coulomb, (costante di -), 116
 Coulomb, (legge di -), 116
 Coulomb, (teorema di -), 126

 D'Alembert, (equazione di -), 140, 161
 Davisson e Germer, (esperimenti di -), 160
 de Broglie, (lunghezza d'onda di -), 160
 de Broglie, (onde di -), 160
 Debye, (teoria di -), 152
 decadimento radioattivo, 168
 densità di carica elettrica, 119
 densità di corrente, 130
 densità di probabilità, 163
 differenza di potenziale (elettrico), 119
 Dinamica dei Sistemi, (Prima equazione cardinale della -), 32
 Dinamica dei Sistemi, (Seconda equazione cardinale della -), 32
 Dinamica in fase impulsiva, (Prima equazione cardinale), 43
 Dinamica in fase impulsiva, (Seconda equazione cardinale), 43
 Dinamica, (Principi della -), 18
 dipolo elettrico, (momento di -), 125
 dipolo magnetico, 136
 Dirichlet, 127
 divergenza, 112, 132
 divergenza, (teorema della -), 112, 120, 131

 doppio prodotto vettoriale, 45, 110
 dualismo ondulatorio-corpuscolare, 161
 Dulong-Petit, (legge di -), 148, 151

 effetto Compton, 158
 effetto fotoelettrico, 157
 effetto tunnel, 168
 Einstein, (formula di -), 152
 Einstein, (legge di -), 158
 Elettrostatica, (Problema Fondamentale dell' -), 127
 emissività, 75, 76
 energia cinetica, 36
 energia cinetica rotazionale, 47
 energia elettromagnetica, 142
 energia elettrostatica, 124
 energia interna, 82, 84
 energia magnetica, 135
 energia meccanica, 38
 energia potenziale, 36, 114
 energia potenziale centrifuga, 57
 entropia, 90, 92, 94, 99
 equazione armonica, 16, 41, 51, 101
 equazione del moto, 18
 equazione del moto del razzo, 34
 equazione di continuità, 131, 164
 equazione di stato, 80
 equilibrio, 28
 equilibrio instabile, 39, 41
 equilibrio stabile, 39, 41, 48
 equilibrio termico, 65, 67
 equipartizione dell'energia, (principio di -), 81, 146, 148
 esplosioni, 42

 Faraday-Lenz, (legge di -), 138
 fase impulsiva, 42
 flusso di un campo vettoriale, 111
 forza centrifuga, 21-23
 forza di Coriolis, 22, 23
 forza elastica, 16, 19, 38, 39
 forza elettromotrice (indotta), 138
 forza impulsiva, 42
 forza peso, 19, 52
 forza vincolare, 19
 forze centrali, 55

- forze conservative, 36, 56, 112, 114
 forze d'inerzia, 21
 fotoelettroni, 157
 fotoni, 158, 160
 Fourier, (legge di -), 69-71
 Franck ed Hertz, (esperimenti di -), 157
 freccia del tempo ed entropia, 93
 frequenza di soglia, 158
 funzione d'onda, 162
 funzione di stato, 83, 84, 90

 gas perfetti, 80
 Gauss, (teorema di -), 59, 116, 120, 126, 129
 gittata di un proiettile, 14
 gradi di libertà, 48, 79, 82
 gradiente, 37, 112
 grado di degenerazione di uno stato, 167
 grave, (caduta di un -), 22
 gravità terrestre, 37, 58
 gravitazione universale, 37, 55, 57, 115

 Heisenberg, (Principio di Indeterminazione di -), 66, 161
 Hooke, (legge di -), 16, 19, 39, 59

 idrogeno, (campo elettrico per un atomo di -), 122
 impetus, 34
 impulso, 34
 induzione elettromagnetica, 138
 induzione elettrostatica, 129
 induzione, (coefficienti di -), 127
 interazioni fondamentali, 20, 107
 irraggiamento, 74-76
 irraggiamento, (teoria quantistica dell' -), 148
 irrotazionali, (campi -), 114
 isolanti, 126

 jacobiano, 111

 Kelvin, (enunciato del 2° Principio), 92
 Keplero, (leggi di -), 55, 56, 60, 61
 Kirchhoff, (legge dell'irraggiamento di -), 74

 Laplace, (equazione di -), 127
 laplaciano, 114, 121
 lavoro, 35, 111
 lavoro compiuto da un gas, 83
 legge delle aree, 56
 legge oraria, 10
 livelli energetici, 157
 livelli energetici dell'atomo di Bohr, 157
 livelli energetici di un atomo, 155
 livello fondamentale, 167
 Lorentz, (forza di -), 133
 lunghezza d'onda Compton, 160

 macchine termiche, 88, 94, 103
 massa ridotta, 61
 massa variabile, (sistemi a -), 33
 Maxwell, (1^a equazione di -), 120
 Maxwell, (2^a equazione di -), 132
 Maxwell, (3^a equazione di -), 137
 Maxwell, (4^a equazione di -), 139
 Maxwell, (equazioni di - , *nel vuoto*), 139
 Meccanica Ondulatoria, 160
 Meccanica Quantistica, 161
 Meyer, (relazione di -), 85, 91
 momento angolare, 33, 45
 momento angolare, (quantizzazione del -), 156, 165
 momento d'inerzia, 45, 48, 54
 momento di una forza, 28, 32
 momento magnetico, 135
 monopoli magnetici, 132
 moto armonico, 16, 59
 moto circolare uniforme, 15
 multipoli, (espansione in -), 124

 Newton, (Leggi di -), 17, 40
 numeri quantici, 166, 167
 numero d'onda, 141
 numero di Avogadro, 81, 148

 Ohm, (1^a legge di -), 130
 Ohm, (2^a legge di -), 130
 Ohm, (legge *Microscopica* di -), 130
 onde elettromagnetiche, 140
 operatore "nabla", 37, 112

- orbite dei pianeti, 58
oscillazioni, 16, 39, 40, 50, 51, 100
- Pauli, (Principio di esclusione di -), 168
periodo di rivoluzione di un pianeta, 60
periodo, (delle *piccole* oscillazioni), 40, 48, 100, 101
periodo, (per il moto circolare uniforme o armonico), 15, 59
permeabilità magnetica (del vuoto), 133
Planck, (costante di -), 145, 158
Planck, (formula di -), 145, 150
Poisson, (equazione di -), 120, 126
polarizzazione di un dielettrico, 126
polo mobile, (termine del -), 33
potenziale, 114
potenziale elettrico, 119
potenziale gravitazionale, 116
potenziale scalare, 139
potenziale vettore, 114, 132
potenziale, (coefficienti di -), 127
potenziali elettromagnetici, 139
potere assorbente, 74
potere emissivo, 74
Poynting, (teorema di -), 143
Poynting, (vettore di -), 143
principio d'inerzia, 18, 28, 34
principio di azione e reazione, 18, 30, 31
principio di sovrapposizione, 116
probabilità termodinamica, 92
prodotto scalare, 109
prodotto triplo-misto, 110
prodotto vettoriale, 109
proiettile (moto del -), 13
pulsazione, 16, 39, 51, 59, 101, 141
punti di *inversione*, 50, 58, 169
puro rotolamento, 52, 54
- quanti di luce, 148, 158, 160
quantità di moto, 32, 34
quantizzazione dell'energia, 166
- raggio vettore, 9
Rayleigh-Jeans, (formula di -), 145
reazione vincolare, 19, 52, 54
- rendimento di una macchina termica, 94, 96
resistenza elettrica, 130
resistività elettrica, 131
righe spettrali dell'idrogeno, 154
rotolamento puro, 51
rotore, 36, 56, 113
Rutherford, (modello atomico di -), 154
Rydberg, (costante di -), 155, 157
Rydberg, (formula di -), 155
- S.I., *Sistema Internazionale*, 7, 116
scalari, grandezze, 108
Schrödinger, (equazione di -), 162
sistemi di riferimento inerziali e non-
inerziali, 19
solenoidali, (campi -), 113, 132
spazio delle fasi, 79
spin di una particella, 168
Statica, (Prima equazione cardinale della -), 28
Statica, (Seconda equazione cardinale della -), 29
stato termodinamico, 79
Stefan-Boltzmann, (costante di -), 75, 147, 151
Stokes, (teorema di -), 113, 138
- temperatura, 65
tempo di rilassamento di un conduttore, 131
Teorema dell'energia cinetica, 36, 38, 106
Teorema dell'impulso, 35
Teorema di Huygens-Steiner, 47
Teorema di König, 47, 53
teoria cinetica dei gas, 66, 80
Termodinamica, (Primo Principio della -), 82
Termodinamica, (Principio Zero della -), 65
Termodinamica, (Secondo Principio della -), 91
Tesla, 133
Thomson, (modello atomico di -), 153
trasformazione adiabatica, 86

- trasformazione isobara, 85
- trasformazione isocora, 84
- trasformazione isoterma, 85
- trasformazioni politropiche, 87
- trasformazioni termodinamiche, 79
- trasformazioni termodinamiche cicliche, 83, 88, 96, 98
- trasformazioni termodinamiche irreversibili, 79
- trasformazioni termodinamiche reversibili, 79, 84
- trasmissione del calore, 69
- trasmissione termica, 73
- trasversalità delle onde elettromagnetiche, 142

- urti, 42, 43
- urto completamente anelastico, 44
- urto elastico, 43, 80, 159

- velocità angolare, 15
- velocità areolare, 56
- velocità della luce, 140
- velocità di fuga, 61, 81
- velocità di trascinamento, 20
- velocità istantanea, 10
- velocità media, 10
- velocità quadratica media delle molecole, 81
- velocità relativa, 20
- versore, 9, 108
- vettore d'onda, 141
- vettori, 108
- vettoriali, grandezze, 108
- vincolo di corpo rigido, 45, 51, 55
- Von Neumann, 127

- Wien, (formula di -), 145
- Wien, (legge di spostamento di -), 75, 151
- Wien-Boltzmann, (legge di -), 75, 76, 147, 150

- zero assoluto, 66